- **محصلة قوتان متلاقيتان في نقطة.**

← القوة: مؤثر يؤثر على الجسم فيغير من حالته.

← **خصائص القوة:**

يتوقف تأثير القوة على عوامل ثلاثة

(أ) مقدار القوة.

(ب) اتجاه القوة.

(ج) نقطة تأثير القوة.

← **أنواع القوى:**

- قوة شد.
- قوة الضغط.
- قوة رد الفعل.
- قوى التثاقل (الوزن).

← **وحدات قياس القوة:**

(أ) وحدات تثاقلية:

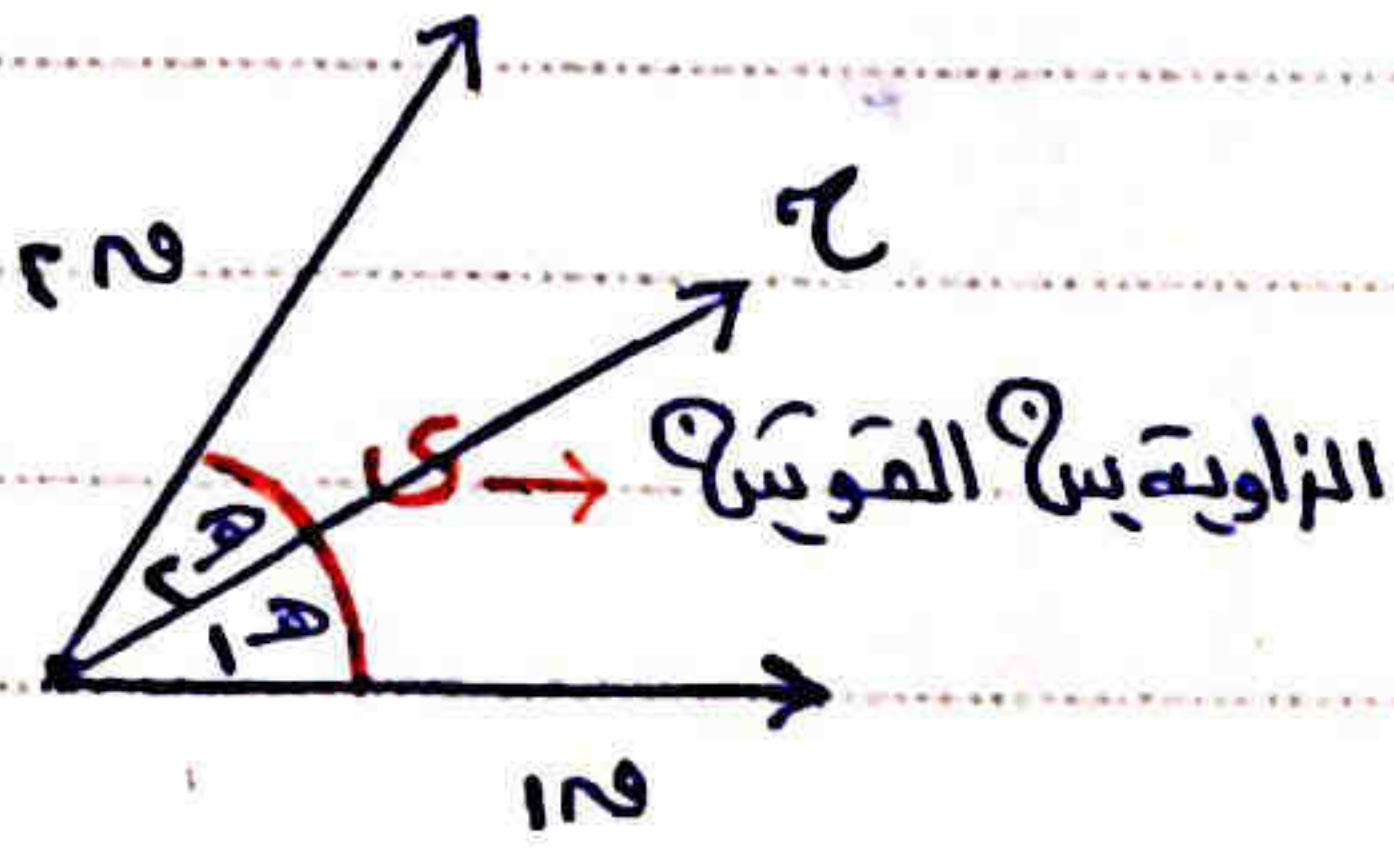
- ث.كجم
- ث.جم
- ث.طن

(ب) وحدات مطلقة:

- نيوتن - داين

← نيوتن = 10^5 داين ، ١ ث.جم = ٩٨٠ داين

١ ث.كجم = ٩,٨ نيوتن

ندخل بقى في الجد

- **مقدار المحصلة:**

← $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

← $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى}$

- **اتجاه المحصلة:**

← $\text{طا } هـ_1 = \frac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى}$

- حيث هـ١ تمثل الزاوية بين المحصلة والقوة الأولى

← $\text{طا } هـ_2 = \frac{ق_1 \text{ جا } ى}{ق_2 + ق_1 \text{ جتا } ى}$

- حيث هـ٢ تمثل الزاوية بين المحصلة والقوة الثانية.

جـ حالات خاصة:

① اذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل ولهما نفس الاتجاه.

(ق١ ، ق٢ في نفس الاتجاه)

- ى = صفر
- ح = ق١ + ق٢

وتكون المحصلة قيمة عظمى

② اذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفي اتجاهان متضادان.

(ق١ ، ق٢ في اتجاهين متضادين)

- ى = ١٨٠°
- ح = |ق١ − ق٢|

وتكون المحصلة قيمة صغرى

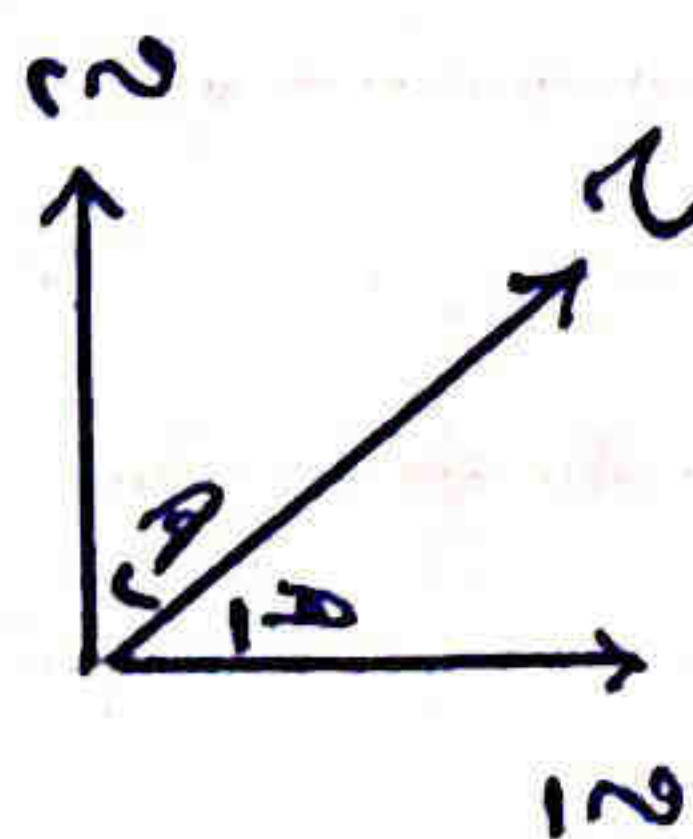
③ اذا كانت القوتان متساويتان في المقدار

- ح = ٢ق جتا $\frac{ى}{٢}$
- هـ١ = هـ٢ = $\frac{ى}{٢}$

يعني المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

④ اذا كانت القوتان متعامدتان.

- ح² = ق١² + ق٢²
- ظا هـ١ = $\frac{ق٢}{ق١}$
- ظا هـ٢ = $\frac{ق١}{ق٢}$

(شكل: ق١ ، ق٢ ، ح ، هـ١ ، هـ٢)

⑤ المحصلة تكون عمودية على القوة الأصغر.

فاذا كانت: ق١ ← هي القوة الأصغر

- ح² = ق٢² − ق١²
- جتا ى = $\frac{-ق١}{ق٢}$

واذا كانت: ق٢ ← هي القوة الأصغر

- ح² = ق١² − ق٢²
- جتا ى = $\frac{-ق٢}{ق١}$

⑥ مهمة جداً جداً جداً

- ح ∈ [|ق١ − ق٢| ، ق١ + ق٢]
- |ق١ − ق٢| ≤ ح ≤ ق١ + ق٢

⑦ اذا كانت القوتان متساويتان في المقدار وكانت المحصلة تساوي احدى القوتين فان (ى = ١٢٠°)

⑧ ٠ ≤ ى ≤ ١٨٠° مهمة بغباء

كدا معاك كل مفاتيح الحل

أ/ عماد صلاح

اعداد الاستاذ / عماد صلاح | معلم الرياضيات والاحصاء | 01030252232

Scanned with CamScanner

** تمارين محاولة **

مثال: قوتان ٥ ، ٣ نيوتن تؤثران في نقطة مادية والزاوية بينهما ٦٠° أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل

ق١ = ٥ نيوتن ، ق٢ = ٣ نيوتن

ى = ٦٠°

▪ ح = $\sqrt{\text{ق١}^2 + \text{ق٢}^2 + \text{٢ ق١ ق٢ جتا ى}}$

= $\sqrt{\text{٢٥ + ٩ + ٣٠ جتا ٦٠°}}$

= ٧ نيوتن #

▪ ظا هـ١ = $\dfrac{\text{ق٢ جا ى}}{\text{ق١ + ق٢ جتا ى}}$

= $\dfrac{\text{٣ × جا ٦٠}}{\text{٥ + ٣ × جتا ٦٠}}$

shift tan (   )

∴ هـ = ٢١° ٤٧' #

وهي زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى.

تمرين للطالب:

قوتان ٥ ، ٧ نيوتن تؤثران في نقطة مادية والزاوية بينهما ٩٠° أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

(ح = $\sqrt{٧٤}$ نيوتن ، ق(هـ) = ٥٤° ٢٨')

مثال: قوتان مقدارهما ٦ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة اذا كانت تميل بزاوية ٤٥° على ق.

الحل

ق١ = ٦ نيوتن ، ق٢ = ق

ى = ١٣٥° ، هـ٢ = ٤٥°

▪ ظا هـ٢ = $\dfrac{\text{ق١ جا ى}}{\text{ق٢ + ق١ جتا ى}}$

ظا ٤٥° = $\dfrac{\text{٦ × جا ١٣٥}}{\text{ق + ٦ × جا ١٣٥}}$

بالحاسبة يا قلبي

∴ ق = ٦$\sqrt{٢}$ نيوتن

▪ ح = $\sqrt{\text{ق١}^2 + \text{ق٢}^2 + \text{٢ ق١ ق٢ جتا ى}}$

= $\sqrt{\text{٣٦ + ٧٢ + ٧٢}\sqrt{٢}\text{ جتا ١٣٥}}$

∴ ح = ٦ نيوتن #

تمرين للطالب:

أوجد الزاوية بين القوتان ٣ ، ٥ نيوتن اذا كانت مقدار محصلتهما ٧ نيوتن.

(ق(ى) = ٦٠°)

Scanned with CamScanner

تمرين للطالب:

قوتان مقدارهما ٣ ، ق ث كجم تؤثران في نقطة مادية فاذا كان مقدار الزاوية بين القوتين ١٢٠° ومقدار محصلتهما ٣√٧ ث كجم فأوجد مقدار ق.

مثال: قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل

خلي بالك قال القوتان متعامدتان يعني حالة خاصة:

■ ح² = ق١² + ق٢²

= (٦)² + (٢,٥)² = ٤٢,٢٥

∴ ح = √٤٢,٢٥ = ٦,٥ نيوتن #

■ ظاهـ = ق٢ / ق١ = ٢,٥ / ٦

shift tan $(\frac{2.5}{6})$

∴ هـ = ٢٢° ٣٧' ١١" #

مثال: اذا كانت ح محصلة قوتين حيث ح ∈ [١٢ ، ٣٢] فأوجد القوتين ثم احسب المحصلة اذا كانت الزاوية بينهم = ٦٠°

الحل

دي حالة هامة ومهمة جداً "جداً"

ق١ - ق٢ ≤ ح ≤ ق١ + ق٢

ق١ - ق٢ = ١٢ ← ①

ق١ + ق٢ = ٣٢ ← ②

بالجمع

٢ق١ = ٤٤ ∴ ق١ = ٢٢ نيوتن

عوض في المعادلة ② ق٢ = ١٠ نيوتن

■ الآن نحسب المحصلة

ح = √(ق١² + ق٢² + ٢ق١ق٢ جتاى)

عوض انت يا حماااادة

∴ ح = ٢√٢٠١ نيوتن #

تمرين للطالب:

قوتان تؤثران في نقطة مادية فاذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ١٦ ث.كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ٦ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين ثم أوجد مقدار محصلتهما اذا كانت الزاوية بين القوتين تساوي ١٢٠°.

(ق١ = ١١ ث.كجم ، ق٢ = ٥ ث.كجم ، ح = √٩١ ث.كجم)

Scanned with CamScanner

مثال إذا أثرت القوى الثلاث التي مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{7}$ نيوتن في نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية = ٦٠° أوجد القيمة العظمى والصغرى لمحصلتهم؟

الحل

الفكرة سهلة هات محصلة القوتين الأولى والثانية واعتبرهم قوة واحدة ومعاهم قوة ثالثة.

$ح_{١،٢} = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ق_١ق_٢ جتاى}$

$= \sqrt{٢٥ + ١٠٠ + ١٠٠ جتا ٦٠}$

$= ٥\sqrt{7}$ نيوتن

- القيمة العظمى

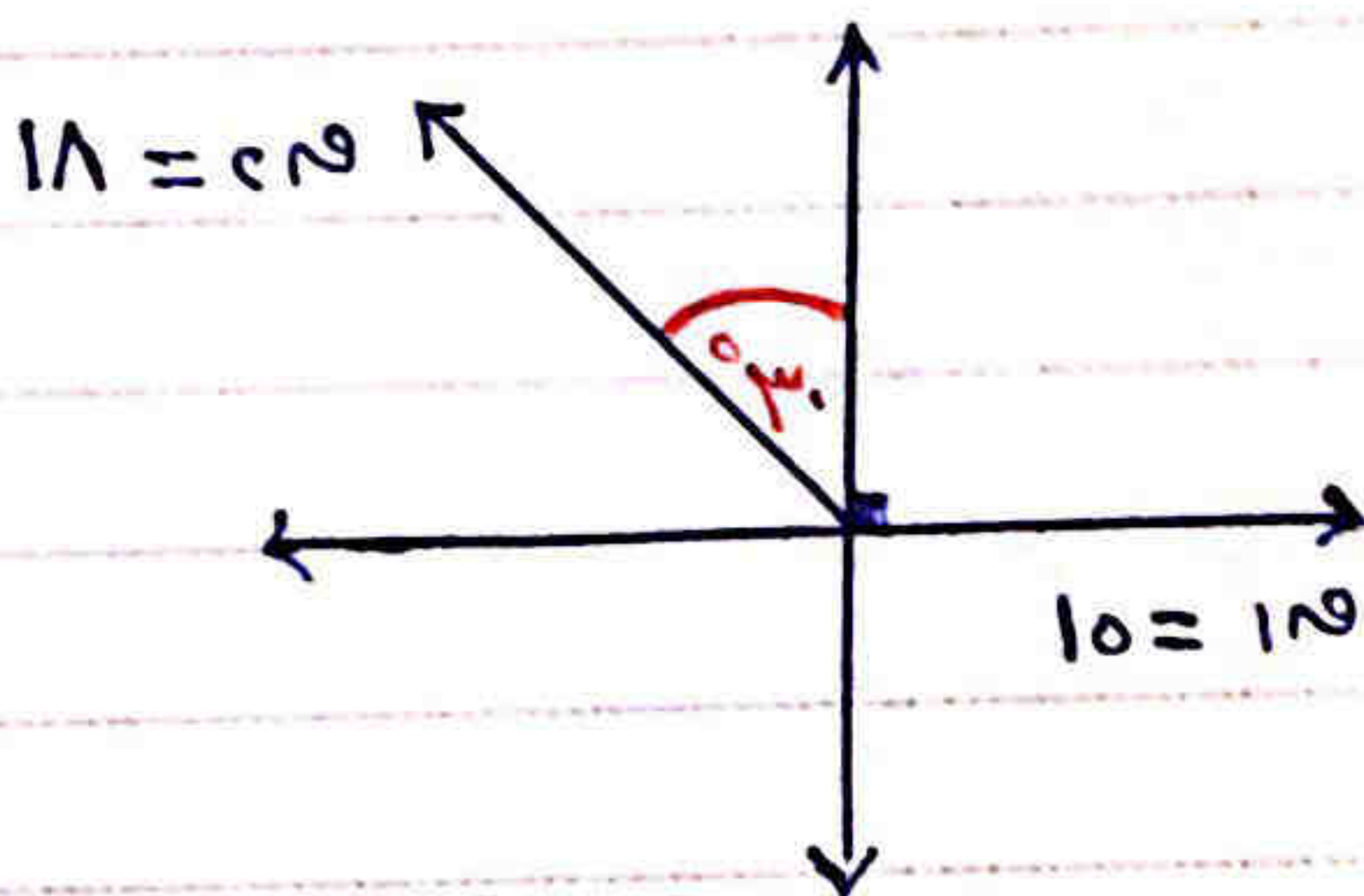
= ح (اللي حسبناها) + ق٣ (الثالثة)

$= ٥\sqrt{7} + ٤\sqrt{7} = ٩\sqrt{7}$ نيوتن

- القيمة الصغرى

= ح (اللي حسبناها) − ق٣ (الثالثة)

$= ٥\sqrt{7} - ٤\sqrt{7} = \sqrt{7}$ نيوتن

مثال أثرت قوتان في نقطة مادية فإذا كان مقدار القوة الأولى ١٥ ث كجم وتؤثر في اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ ث كجم وتؤثر في اتجاه ٣٠° غرب الشمال احسب مقدار واتجاه المحصلة؟

الحل

- $ح = \sqrt{١٥^٢ + ١٨^٢ + ٢ \times ١٥ \times ١٨ \times جتا ١٢٠°}$

∴ $ح = ٣\sqrt{٣١}$ نيوتن #

- $ظاهـ_١ = \frac{ق_٢ جاى}{ق_١ + ق_٢ جتاى}$

$= \frac{١٨ جا ١٢٠}{١٥ + ١٨ جتا ١٢٠}$

∴ $هـ_١ = ٦٨° ٥٦' ٥٣''$ #

∴ المحصلة تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها

Scanned with CamScanner

مثال قوتان متعامدتان تؤثران في نقطة مادية احدهما يساوي $\frac{2}{3}$ مقدار الأخرى ومقدار محصلتهما يساوي $5\sqrt{13}$ نيوتن أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

■ القوتان متعامدتان.

$\therefore ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2$

$ق_1 = ق$ ، $ق_2 = \frac{2}{3} ق$

$ح = 5\sqrt{13}$

$\therefore (5\sqrt{13})^2 = ق^2 + \left(\frac{2}{3}ق\right)^2$

$325 = ق^2 + \frac{4}{9} ق^2$

$\therefore ق = 15$ نيوتن

$\therefore ق_1 = 15$ نيوتن

$ق_2 = \frac{2}{3} \times 15 = 10$ نيوتن #

مثال قوتان مقداراهما ٥٠، ١٠٠ نيوتن أوجد مقدار محصلتهما اذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى؟

الحل

■ المحصلة عمودية على القوة الأولى

$ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى = 0$

$50 + 100 \text{ جتا } ى = 0$

$\text{جتا } ى = \frac{-50}{100} = \frac{-1}{2}$

$\therefore ى = 120°$

■ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

$= 50^2 + 100^2 + 2 \times 50 \times 100 \times \text{جتا } 120$

$= 7500$

$\therefore ح = \sqrt{7500} = 50\sqrt{3}$ نيوتن #

مثال قوتان مقداراهما ٢ق، ٣ق نيوتن أوجد قياس الزاوية بين القوتين اذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن.

الحل

$ق_1 = 2ق$ ، $ق_2 = 3ق$ ، $ح = ق$

■ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

$ق^2 = 4ق^2 + 9ق^2 + 2 \times 2ق \times 3ق \times \text{جتا } ى$

$ق^2 = 13 ق^2 + 12 ق^2 \text{ جتا } ى$

$1 = 13 + 12 \text{ جتا } ى$

$\therefore \text{جتا } ى = \frac{-12}{12} = -1$

$\therefore ى = 180°$ #

مثال قوتان مقداراهما ق، $\sqrt{2}$ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° اثبت أن مقدار محصلتهما ق نيوتن وأوجد زاوية ميلها على القوة الأولى

الحل

$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

$= ق^2 + 2ق^2 + 2\sqrt{2} ق^2 \text{ جتا } 135$

$= 3ق^2 - 2ق^2 = ق^2$

$\therefore ح = ق$ نيوتن #

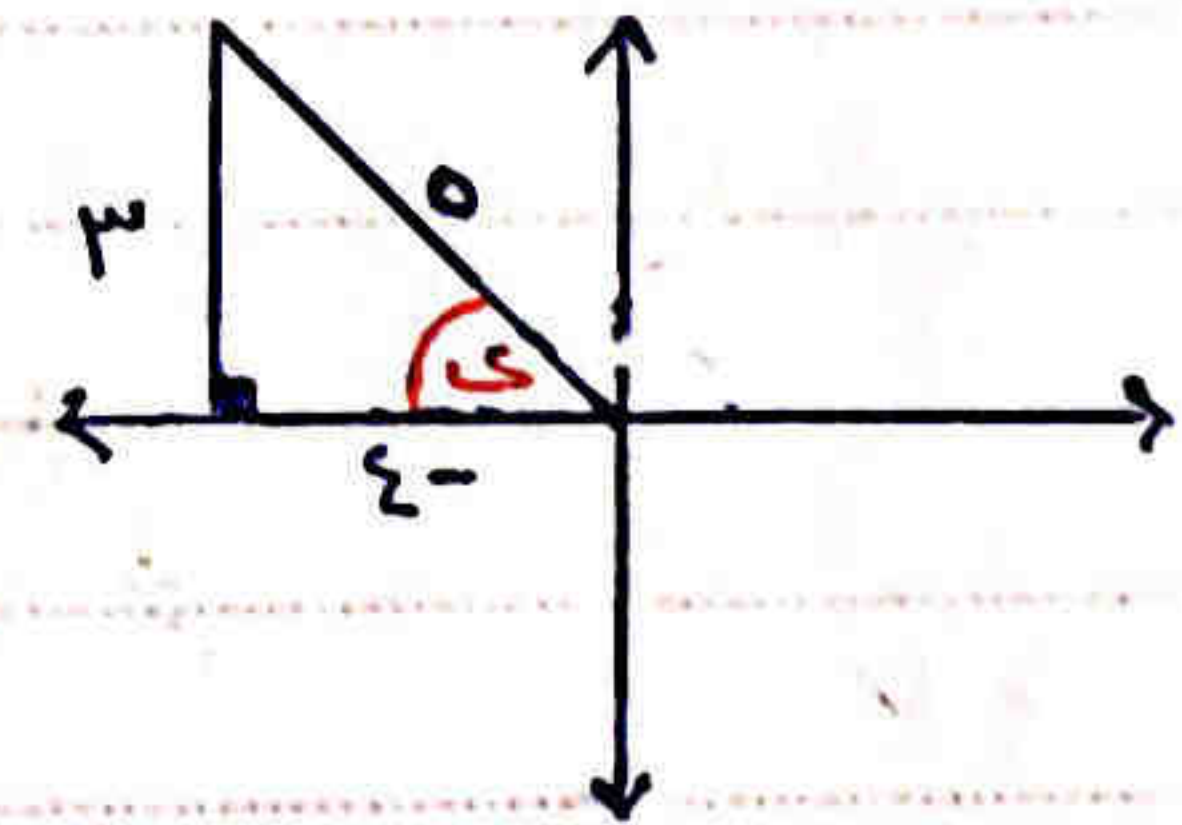
Scanned with CamScanner

• $ظا هـ = \frac{ق_2 جا ى}{ق_1 + ق_2 جتا ى}$

$= \frac{ق\, 2\sqrt{2}\, جا 135^\circ}{ق + ق\, 2\sqrt{2}\, جتا 135}$

$= \frac{ق}{0}$ غير معروف

∴ ق(هـ) = ٩٠° أي أن المحصلة عمودية على القوة الأولى #

مثال قوتان مقداراهما ١٢، ١٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وظل الزاوية بينهما $-\frac{3}{4}$ أوجد المحصلة وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى ؟

الحل

• $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 جتا ى$

$= 12^2 + 15^2 + 2 \times 12 \times 15 \times -\frac{4}{5}$

∴ ح = ٩ نيوتن #

• $ظا هـ = \frac{ق_2 جا ى}{ق_1 + ق_2 جتا ى}$

$= \frac{15 \times \frac{3}{5}}{12 + 15 \times -\frac{4}{5}} = \frac{1}{0}$ غير معروف

∴ ق(هـ) = ٩٠° #

مثال قوتان مقداراهما ٢ق، ٣ق ومقدار المحصلة لهما = ٥ق فان قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) ٠ (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

الحل

$ح = ق_1 + ق_2$ ∴ ى = ٠°

مثال قوتان مقداراهما ٢ق، ٥ق ومقدار المحصلة ٣ق فان قياس الزاوية بينهما

(أ) ٠ (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ١٢٠°

الحل

$ح = ق_1 - ق_2$ ∴ ى = ١٨٠°

مثال قوتان متساويتان ومتلاقيتان في نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار المحصلة ٦ نيوتن فان قياس الزاوية بينهما ......

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٦٠°

الحل

القوتان متساويتان والمحصلة تساوي احدى القوتين فان ى = ١٢٠° #

Scanned with CamScanner

مثال قوتان مقداراهما ٣ نيوتن ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° اذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فان ق = ... نيوتن

الحل

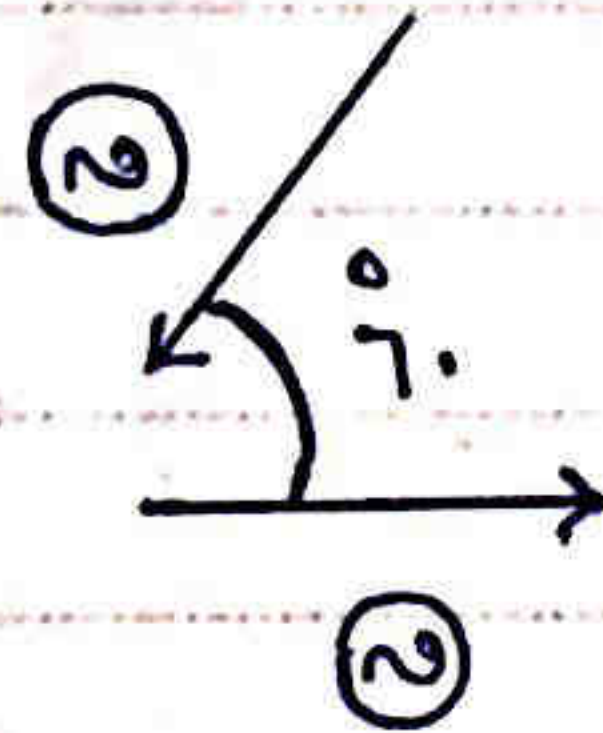
• المحصلة عمودية على ق١

∴ جتا ى = $\frac{-ق_١}{ق_٢}$

جتا ١٢٠° = $\frac{-٣}{ق}$

∴ ق = ٦ نيوتن #

مثال مقدار محصلة القوتين في الشكل المقابل = ...

(أ) ½ ق (ب) ق (ج) √٣ ق (د) ٢ ق

الحل

القوتان متساويتان الزاوية بينهما ١٢٠°

∴ ح = احدى القوتين = ق #

مثال قوتان قياس الزاوية بينهما θ فان مقدار محصلتهما ......

(أ) يزداد بزيادة θ
(ب) تتناقص بنقص θ
(ج) يزداد بنقص θ
(د) لا يتغير بتغير θ

التحليل

مثلاً:

$ح_١^٢$ = ٢٥ + ٩ + ٢ × ٥ × ٣ × جتا ٦٠

$ح_٢^٢$ = ٢٥ + ٩ + ٢ × ٥ × ٣ × جتا ٣٠

هنلاحظ $ح_٢^٢ > ح_١^٢$

خلاص كده خلصت #

مثال قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما ق١ ، ق٢ حيث ٠ ≤ θ ≤ $\frac{\pi}{٢}$ وكان: ٥ ≤ ق١ ≤ ٢٠ ، ١٢ ≤ ق٢ ≤ ٢١ فان المحصلة تكون ......

الحل

∵ ٠ ≤ θ ≤ $\frac{\pi}{٢}$

(عند θ = ٠) ∴ ١٧ ≤ ق١ + ق٢ ≤ ٤١

١٧ ≤ ح ≤ ٤١ #

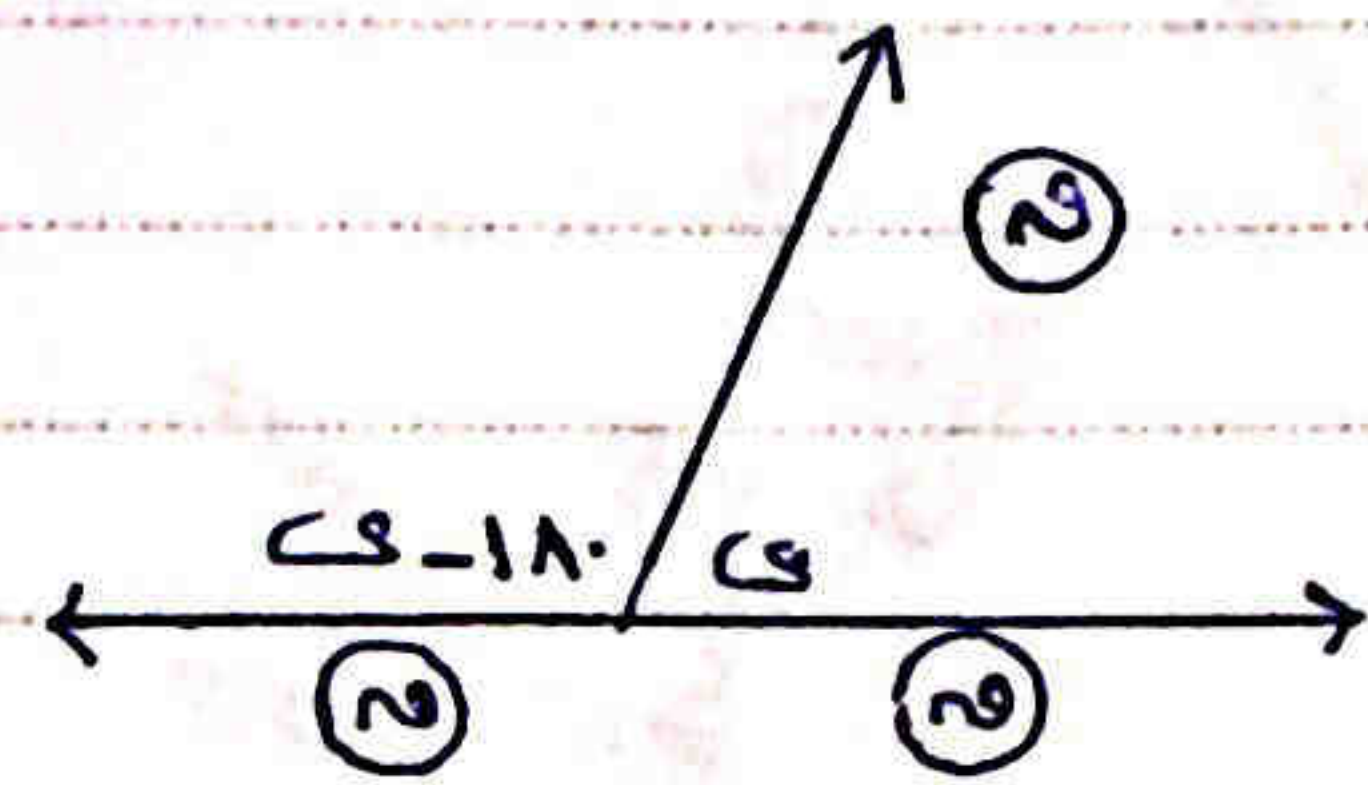
(عند θ = $\frac{\pi}{٢}$) $٥^٢ + ١٢^٢ ≤ ق_١^٢ + ق_٢^٢ ≤ ٢٠^٢ + ٢١^٢$

$١٦٩ ≤ ق_١^٢ + ق_٢^٢ ≤ ٨٤١$

$\sqrt{١٦٩} ≤ ح^٢ ≤ \sqrt{٨٤١}$

∴ ١٣ ≤ ح ≤ ٤١ #

Scanned with CamScanner

مثال قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما = ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه احداهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين ؟

مثال مهم جداً

الحل

ح² = ق١² + ق٢² + ٢ق١ق٢ حتاى

١٢² = ق² + ق² + ٢ق² حتاى

١٤٤ = ٢ق² + ٢ق² حتاى

٧٢ = ق² + ق² حتاى ← (١)

- عكس اتجاه أحد القوتين:

ح² = ق² + ق² + ٢ق² حتا(١٨٠ - ى)

٣٦ = ٢ق² + ٢ق² × - حتاى

١٨ = ق² - ق² حتاى ← (٢)

بجمع المعادلتان (١) و (٢)

٩٠ = ٢ق² ← ق² = ٤٥

∴ ق = ٣√٥ ث.كجم #

هناك حل آخر:

∵ القوتان متساويتان (من الملاحظات)

∴ ح = ٢ق جتا ى/٢ كمل بقية الخطوات

مثال قوتان متساويتان في المقدار ق وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت المحصلة بمقدار ١١ ث.كجم عن الحالة الأولى أوجد مقدار ق ؟

الحل

ق١ = ق٢ = ق ، ى = ١٢٠°

- من الملاحظات علماً ∵ ق١ = ق٢

∴ ح١ = ٢ق جتا ى/٢

ح١ = ٢ق جتا ٦٠

ح١ = ٢ق × ١/٢ ← ح١ = ق ← (١)

- تضاعف القوتان: ق١ = ق٢ = ٢ق

ى = ٦٠°

ح٢ = ٢ق جتا ى/٢

ح٢ = ٢ق جتا ٣٠ = ٢ × ٢ق جتا ٣٠

ح٢ = ٤ق × √٣/٢ ← ح٢ = ٢√٣ ق ← (٢)

- زادت المحصلة بمقدار ١١

ح٢ - ح١ = ١١

من (١) و (٢)

٢√٣ ق - ق = ١١

ق(٢√٣ - ١) = ١١

∴ ق = ١١ / (٢√٣ - ١) اضرب في مرافق المقام

∴ ق = ١ + ٢√٣ ث.كجم

Scanned with CamScanner

مثال: قوتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن المحصلة ممكن أن تكون:

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (ج) ١٢ (د) ١

الحل

ح ∈ [ق١ − ق٢ ، ق١ + ق٢]

∈ [٢ ، ١٤]

= {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤}

دور على رقم موجود في الاختيارات مش هتلاقي غير ١٢

مثال: إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين ٤ : ١ فإن النسبة بين القوتين ......

(أ) ٤ : ١ (ب) ٥ : ٣ (ج) ٣ : ١ (د) ٣ : ٢

الحل

(ق١ + ق٢) / (ق١ − ق٢) = ٤ / ١

ق١ + ق٢ = ٤ق١ − ٤ق٢

ق٢ + ٤ق٢ = ٤ق١ − ق١

٥ق٢ = ٣ق١

∴ ق١ : ق٢ = ٥ : ٣

مثال: قوتان مقدارهم ٤ ، ق داين وقياس الزاوية بينهم ∈]٠ ، ٢π[وكانت المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين فإن ق = ... داين.

الحل

المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

∴ ق١ = ق٢ ∴ ق = ٤ داين #

مثال: قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ق − ٥) ، (ق + ٢) ومقدار محصلتهما ٣√٥ فإن قيمة ق تساوي ...... نيوتن

الحل

∵ ق١ ⊥ ق٢ ∴ ح² = ق١² + ق٢²

(٣√٥)² = (٢ق − ٥)² + (ق + ٢)²

٤٥ = ٤ق² − ٢٠ق + ٢٥ + ق² + ٤ق + ٤

∴ ٥ق² − ١٦ق − ١٦ = ٠

(٥ق + ٤)(ق − ٤) = ٠

∴ ق = ٤ نيوتن #

Scanned with CamScanner

مثال قوتان متساويتان في المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتهما تساوي ...... نيوتن

الحل

ق١ = ق٢ = ق ، ح = ١٦

، ى = ٩٠°

ح² = ق١² + ق٢² + ٢ ق١ ق٢ جتا ى

١٦² = ٢ق² + ٢ق² جتا ٩٠

∴ ٢ق² = ١٦ × ١٦

ق² = ٨ × ١٦

∴ ق = ٨√٢

القيمة العظمى للمحصلة

ح = ق١ + ق٢ = ٨√٢ + ٨√٢

= ١٦√٢ نيوتن #

مثال قوتان مقدارهما ق١ ، ق٢ نيوتن حيث ق١ > ق٢ ومقدار محصلتهما ح حيث ح ∈ [٣ ، ١٢] فإن ق١² − ق٢² = ... نيوتن

الحل

ق١ − ق٢ = ٣ ، ق١ + ق٢ = ١٢

∴ ق١² − ق٢² = (ق١ − ق٢)(ق١ + ق٢)

= ٣ × ١٢ = ٣٦ نيوتن #

مثال في الشكل المقابل مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن

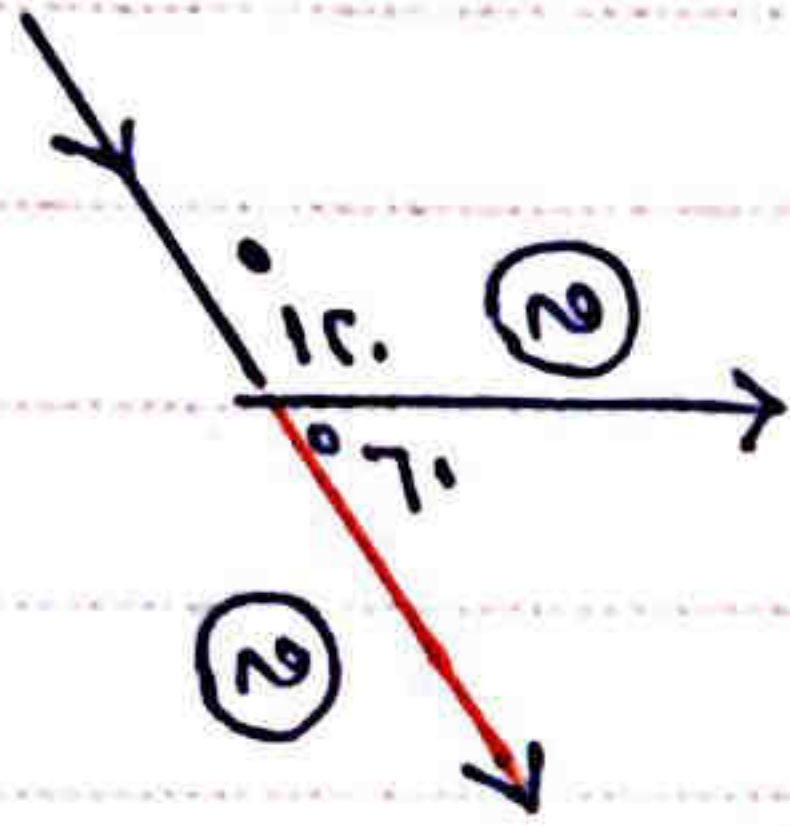
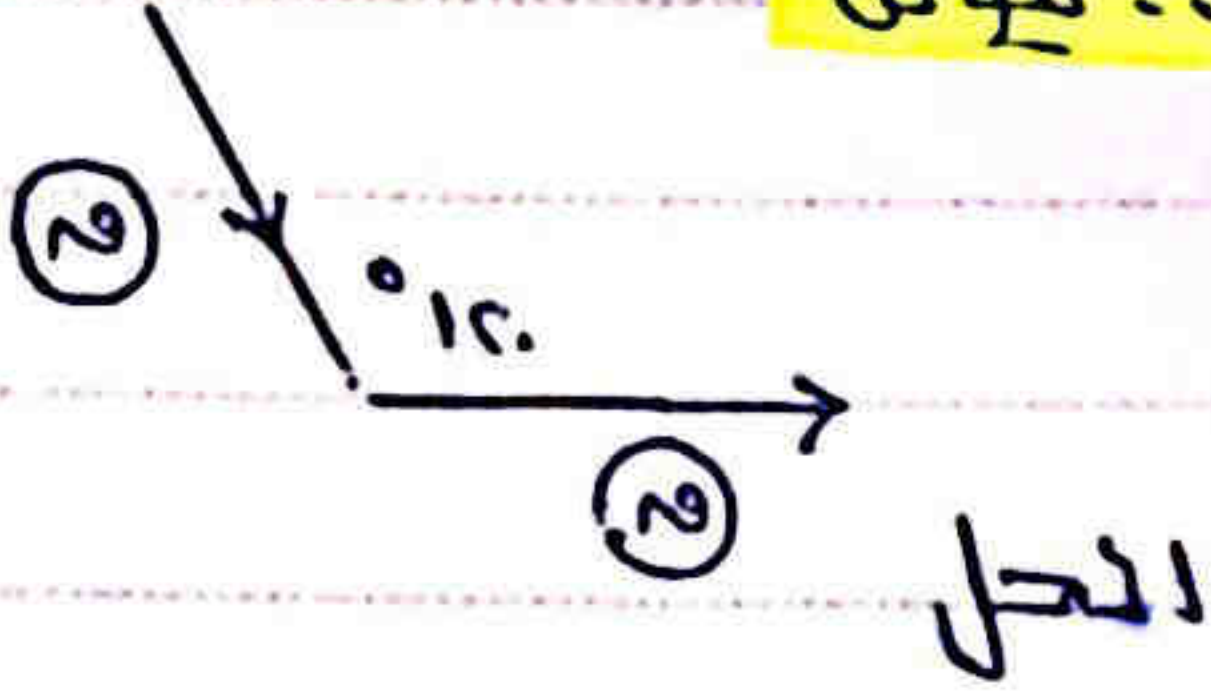
ق ، ١٢٠° ، ق

الحل

ق ، ١٢٠° ، ٦٠° ، ق

ح = ٢ق جتا $\frac{ى}{2}$ (لأن ق١ = ق٢)

ح = ٢ق × جتا $\frac{60}{2}$ = ٢ق × جتا ٣٠

ح = ٢ق × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = √٣ ق #

مثال إذا بلغت المحصلة بين قوتين قيمة عظمى فإن قياس الزاوية = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠°
(ج) صفر° (د) ١٨٠°

مثال إذا كانت ح١→ محصلة ق١→ ، ق٢→ وكانت ح٢→ محصلة ق١→ ، −ق٢→ وكان |ق١→| = |ق٢→| فإن ....

(أ) ح١→ ⊥ ح٢→ (ب) ح١→ = ح٢→
(ج) |ح١→| = |ح٢→| (د) ح١→ // ح٢→

Scanned with CamScanner

② تحليل القوى :

Ⓐ في اتجاهين معلومين.

▪ $\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ح}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$

نصبوا أخذ :

← $ق_1 = \frac{ح جا هـ_2}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$

← $ق_2 = \frac{ح جا هـ_1}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$

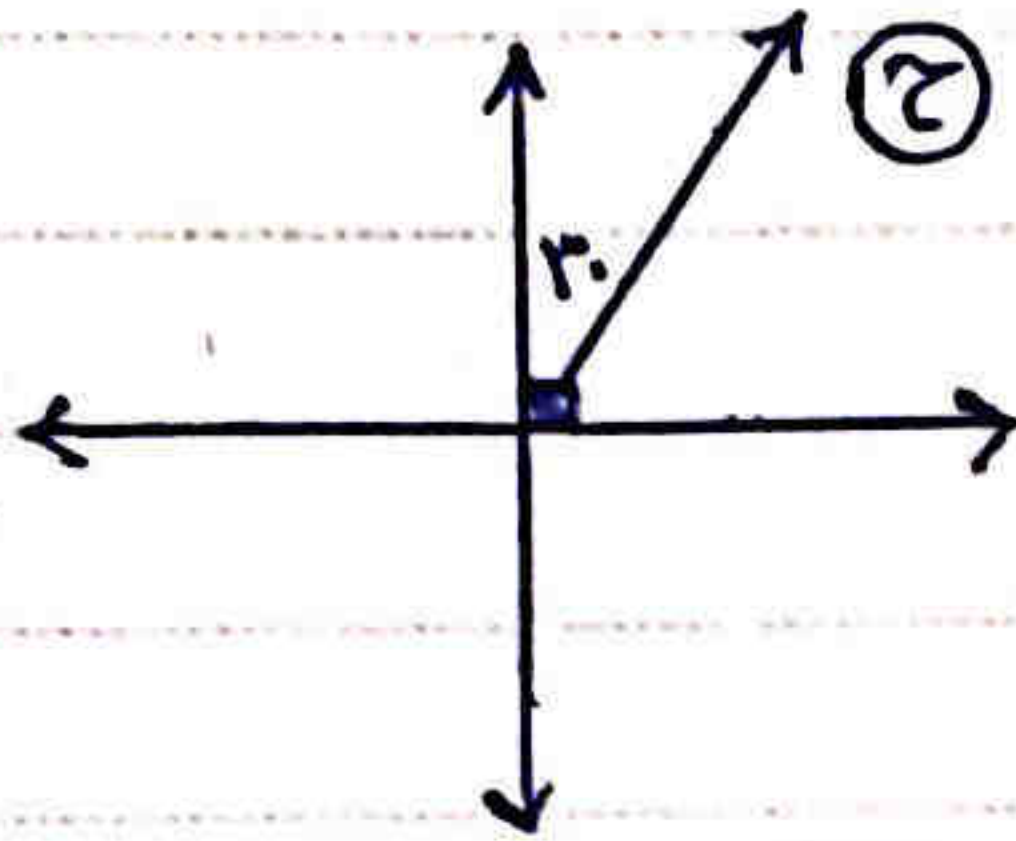
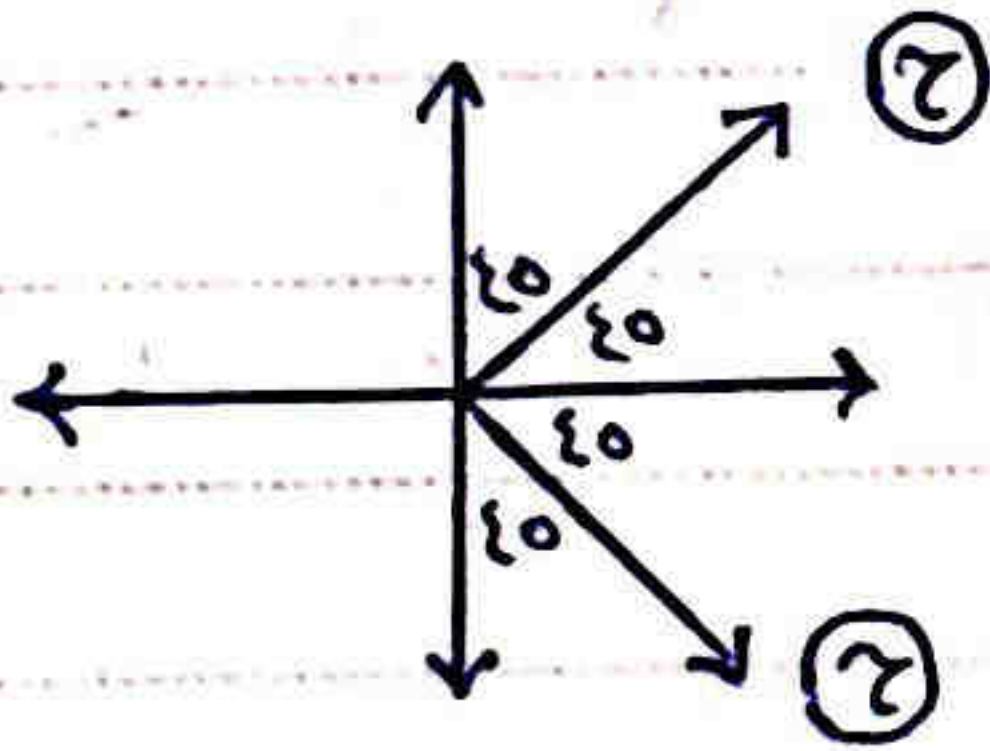
Ⓑ في اتجاهين متعامدين.

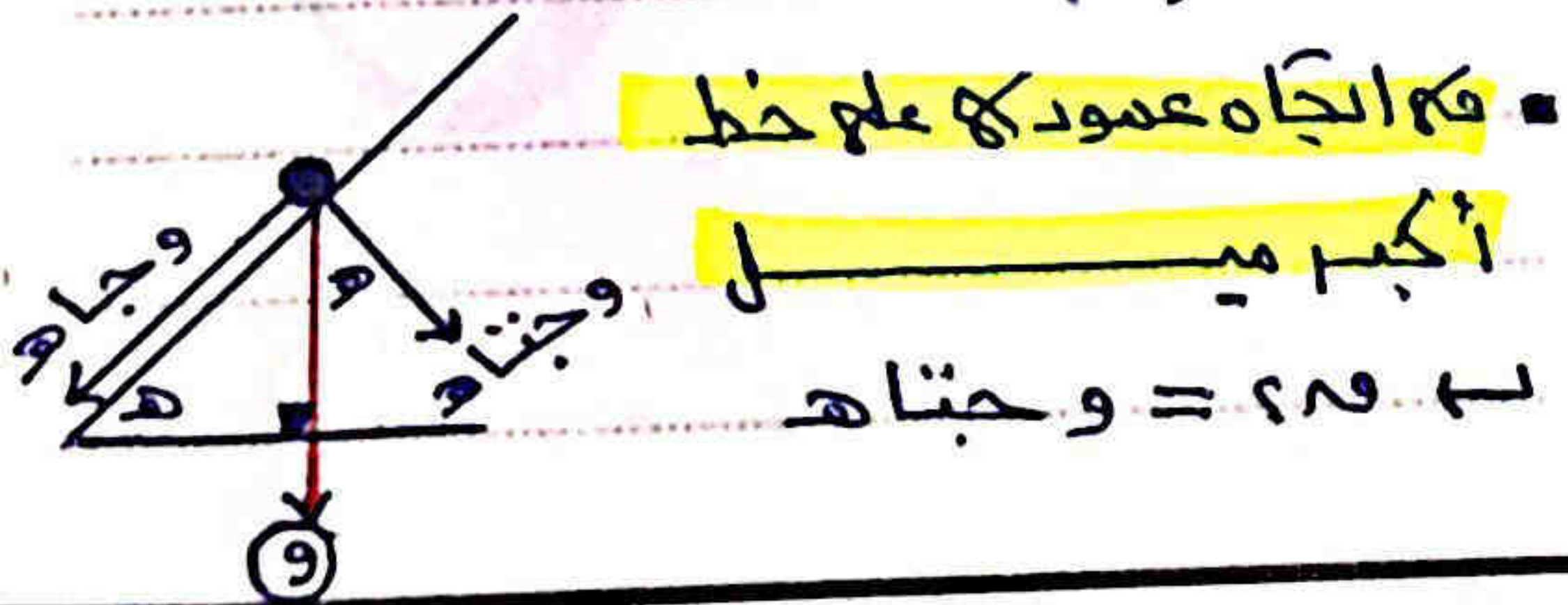
▪ $ق_1 = ح$ جتا هـ

▪ $ق_2 = ح$ جا هـ

متنساش مطرح ما الزاوية تنام اديها جيب التمام (جتا)

• ملاحظات هامة

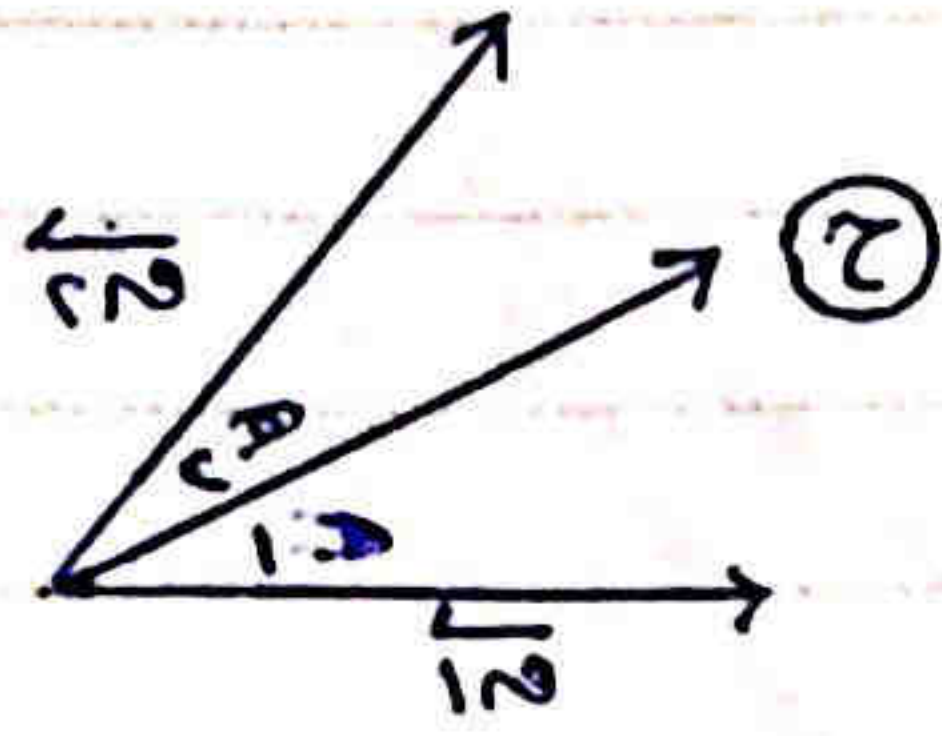
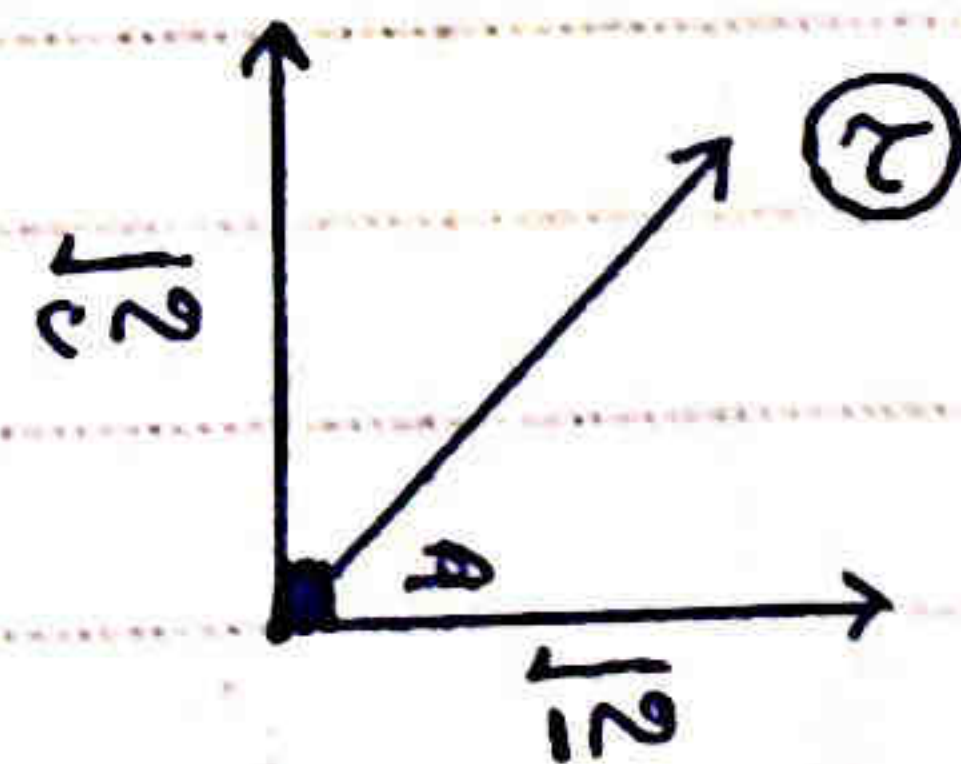
← لو قال لحضرتك حلل قوة ح تعمل في اتجاه مثلاً ٣٠° شرق الشمال الزاوية يا معلم حطها جهة الشمال يعني تحط الزاوية من الكلمة الثانية اللي معاها الـ

← لو قال لحضرتك حلل قوة ح تعمل في اتجاه شرق الشمال أو الجنوب الشرقي أو أي اتجاهين من نفس و لم يحدد الزاوية ارسم القوة في المنتصف

← اذا وضع جسم على مستوى مائل فان الوزن (و) يؤثر رأسياً لأسفل ويكون له مركبتان

▪ في اتجاه خط أكبر ميل لأسفل

← $ق_1 =$ و جا هـ

▪ في اتجاه عمودي على خط أكبر ميل

← $ق_2 =$ و جتا هـ

اعداد الاستاذ / عماد صلاح
معلم الرياضيات والاحصاء
01030252232

Scanned with CamScanner

مثال حلل قوة مقدارها ٣٠ نيوتن تؤثر في اتجاه الشرق الى قوتين متساويتين في المقدار و قياس الزاوية بينهما ٦٠°

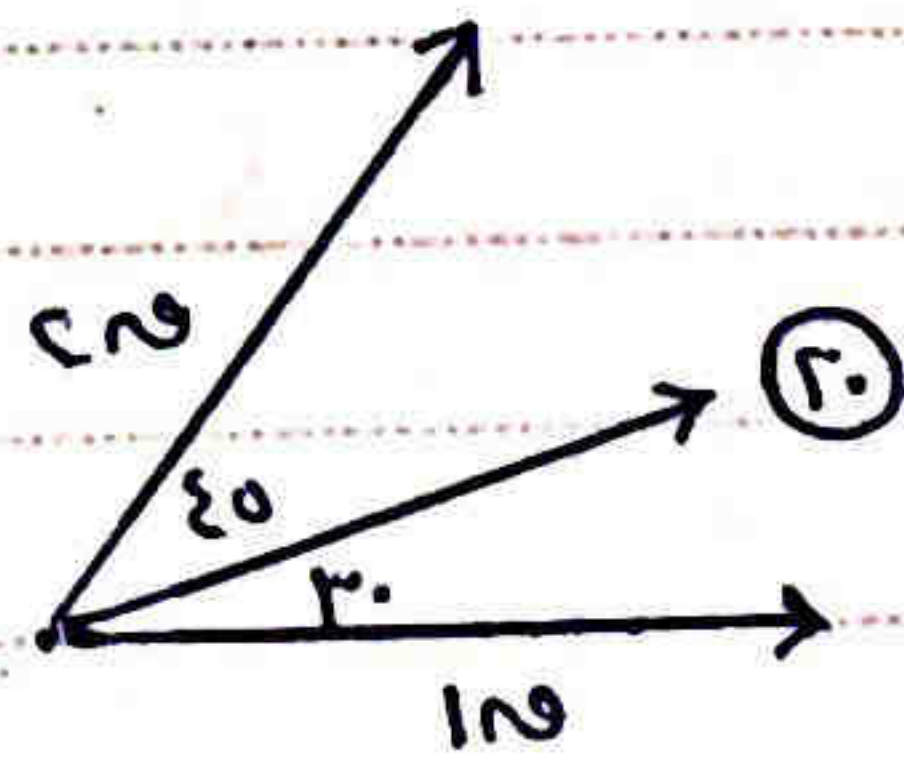
الحل

- $ق = \frac{٣٠ \text{ جا } ٣٠}{\text{جا}(٣٠+٣٠)} = ١٠\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال حلل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن الى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياسهما ٣٠°، ٤٥° في ناحيتين مختلفتين لأقرب رقمين عشريين؟

الحل

- $ق_١ = \frac{٢٠ \text{ جا } ٤٥}{\text{جا}(٣٠+٤٥)} = ١٤,٦٤$ نيوتن

- $ق_٢ = \frac{٢٠ \text{ جا } ٣٠}{\text{جا}(٣٠+٤٥)} = ١٠,٣٥$ نيوتن

مثال حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن تؤثر رأسياً لأسفل الى مركبتين في اتجاهين مختلفين أحداهما أفقية و الأخرى تميل عليها بزاوية قياسها ٣٠°؟

الحل

- $ق_١ = \frac{١٠٠ \text{ جا } ٣٠}{\text{جا}(٣٠+٩٠)} = \frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن

- $ق_٢ = \frac{١٠٠ \text{ جا } ٩٠}{\text{جا}(٣٠+٩٠)} = \frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن

Scanned with CamScanner

مثال: حلل قوة مقدارها ق ث جم تعمل في اتجاه الشمال الى مركبتين، الأولى في اتجاه ٣٠° شمال الشرق ومقدارها ١٥ ث جم والثانية في اتجاه الغرب أوجد مقدار ق ومقدار المركبة الثانية.

الحل

▪ $ق_١ = \frac{ق \text{ جا } ٩٠}{\text{جا}(٦٠+٩٠)}$

$١٥ = \frac{ق \times ١}{\text{جا } ١٥٠°}$

∴ ق = ٧,٥ ث جم #

▪ $ق_٢ = \frac{٧,٥ \text{ جا } ٦٠}{\text{جا } ١٥٠}$

∴ $ق_٢ = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ث. جم #

مثال: أوجد مركبتي $\overrightarrow{ق}$ في اتجاهي المحورين في كل مما يأتي

① $\overrightarrow{ق} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$

الحل

٣ وحدة في اتجاه $\overrightarrow{وس}$

٢ وحدة في اتجاه $\overrightarrow{وص'}$

② $\overrightarrow{ق} = (٨\sqrt{٢}، ١٣٥°)$ ← صورة قطبية

الحل

$س = ٨\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥ $= -٤\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$

$ص = ٨\sqrt{٢}$ جا ١٣٥ $= ٤\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

← $٤\sqrt{٢}$ في اتجاه $\overrightarrow{وس'}$

← $٤\sqrt{٢}$ في اتجاه $\overrightarrow{وص}$

مثال: حلل قوة مقدارها ٥٠ نيوتن في اتجاهين متعامدين ويصنع أحدهما مع اتجاه القوة زاوية ٣٠°.

الحل

$ق_١ = ٥٠$ جتا ٣٠ $= ٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن #

$ق_٢ = ٥٠$ جا ٣٠ $= ٢٥$ نيوتن #

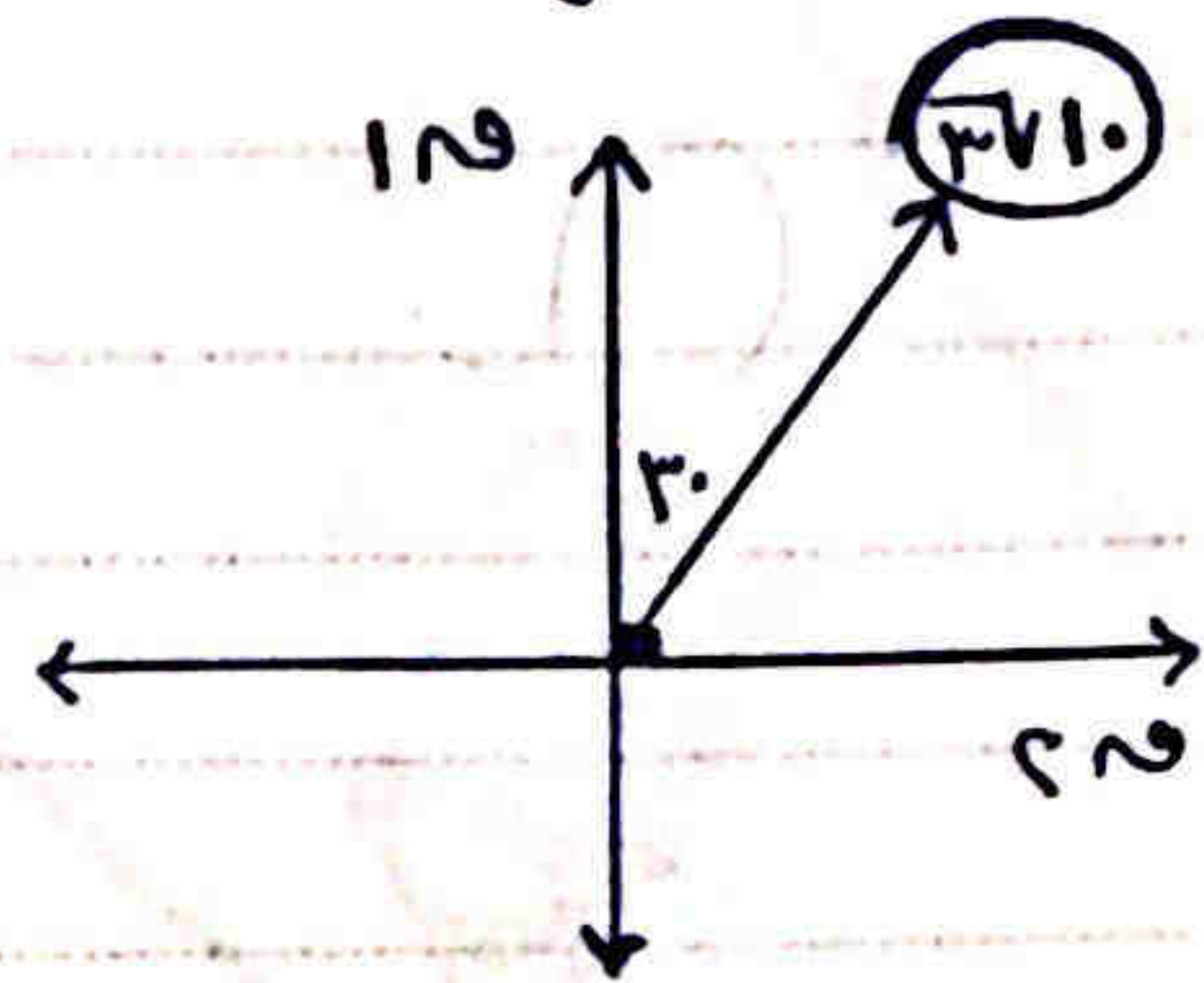
ممكن تحلها زي ما شوفت من غير ما ترسم

Scanned with CamScanner

مثال حلل قوة مقدارها ١٠√٣ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠° شرق الشمال الى مركبتين أحدهما في اتجاه الشمال والاخرى في اتجاه الشرق.

الحل

القوتان متعامدتان:

- ق١ = ١٠√٣ جتا ٣٠ = ١٥ نيوتن
- ق٢ = ١٠√٣ جا ٣٠ = ٥√٣ نيوتن

مثال أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين لوزن جسم موضوع على مستوى أفقي ومقداره ٤٠ نيوتن اذا علم أن أحدهما يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° لأسفل

الحل

ق١ = ٤٠ جتا ٦٠ = ٢٠ نيوتن #

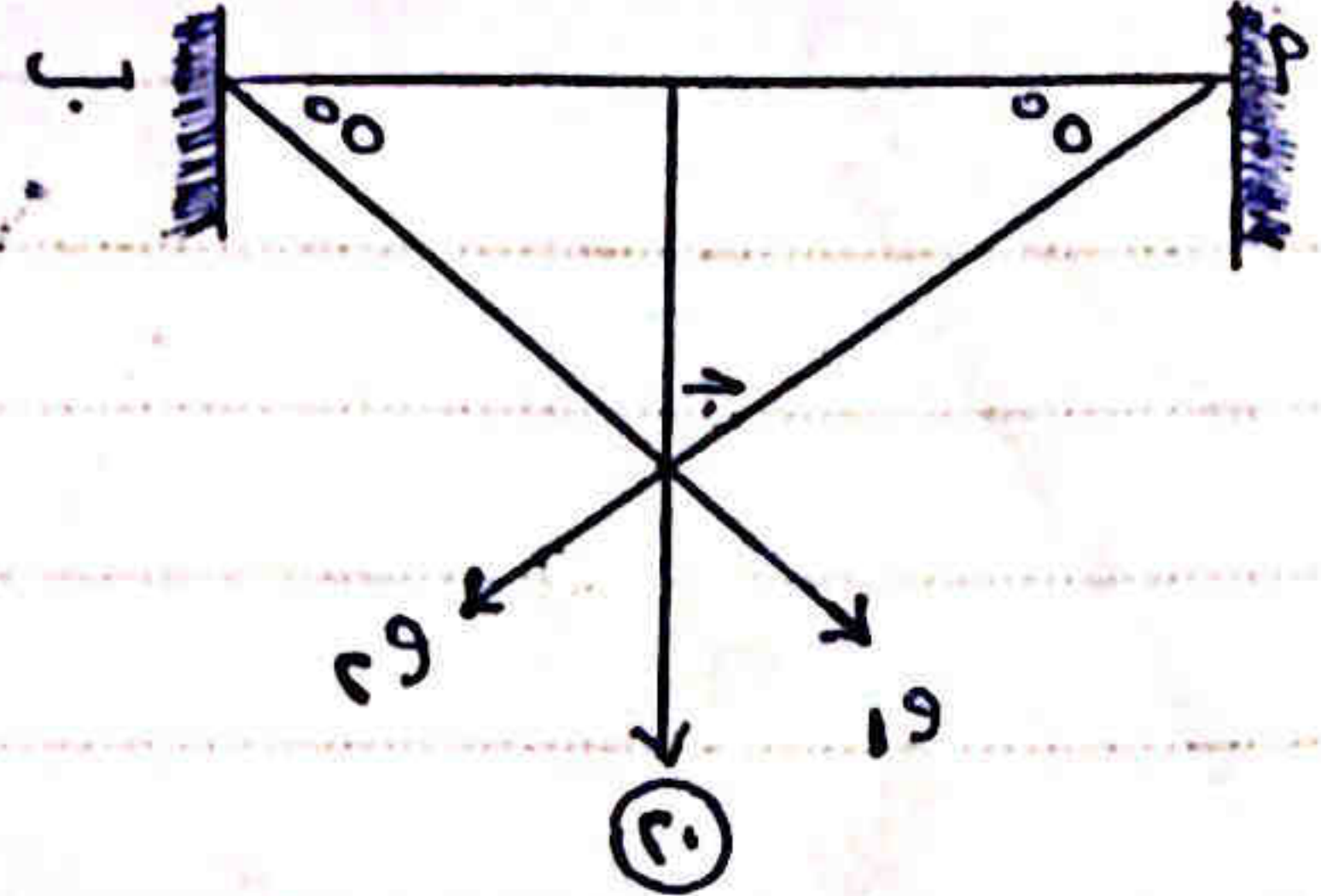
ق٢ = ٤٠ جا ٦٠ = ٢٠√٣ نيوتن #

مثال حلل القوة ١٢٠ نيوتن في اتجاه ق١، ق٢

الحل

- ق١ = $\frac{١٢٠ \text{ جا } ٤٨}{\text{جا }(٩٠ + ٤٨)}$ = ١٣٣,٢٧ نيوتن
- ق٢ = $\frac{١٢٠ \text{ جا } ٩٠}{\text{جا }(٩٠ + ٤٨)}$ = ١٧٩,٣٤ نيوتن

Scanned with CamScanner

مثال) مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين مهملين $\overline{\text{أ ج}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$ يميلان على الأفقي بزاويتين متساويتين كل منهما ٥°

أ) حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ج}}$

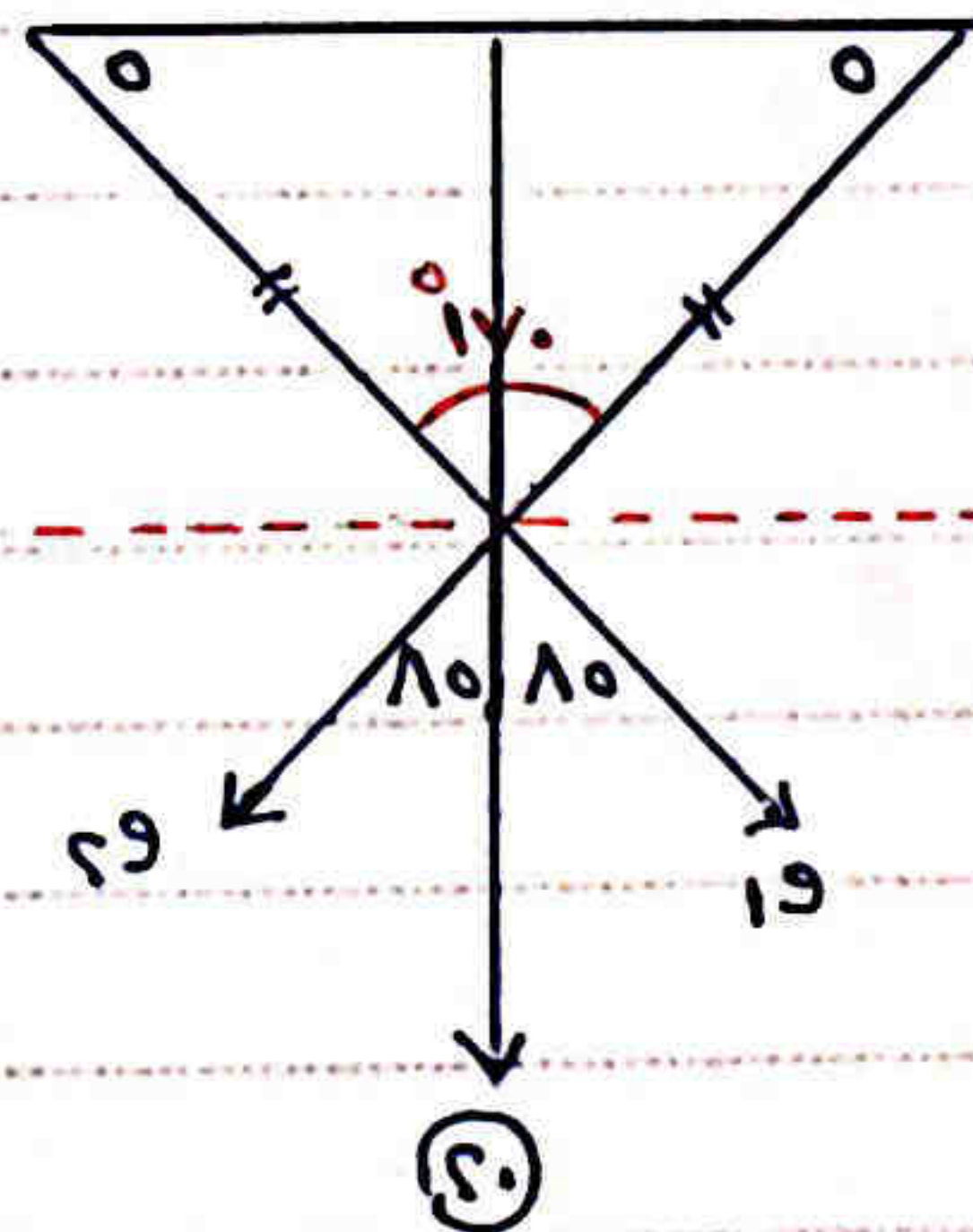
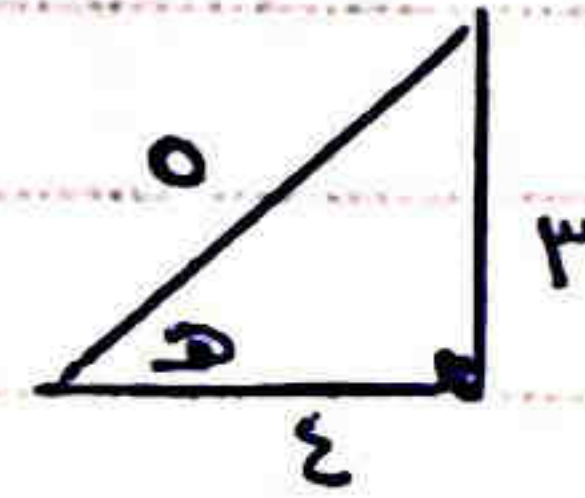
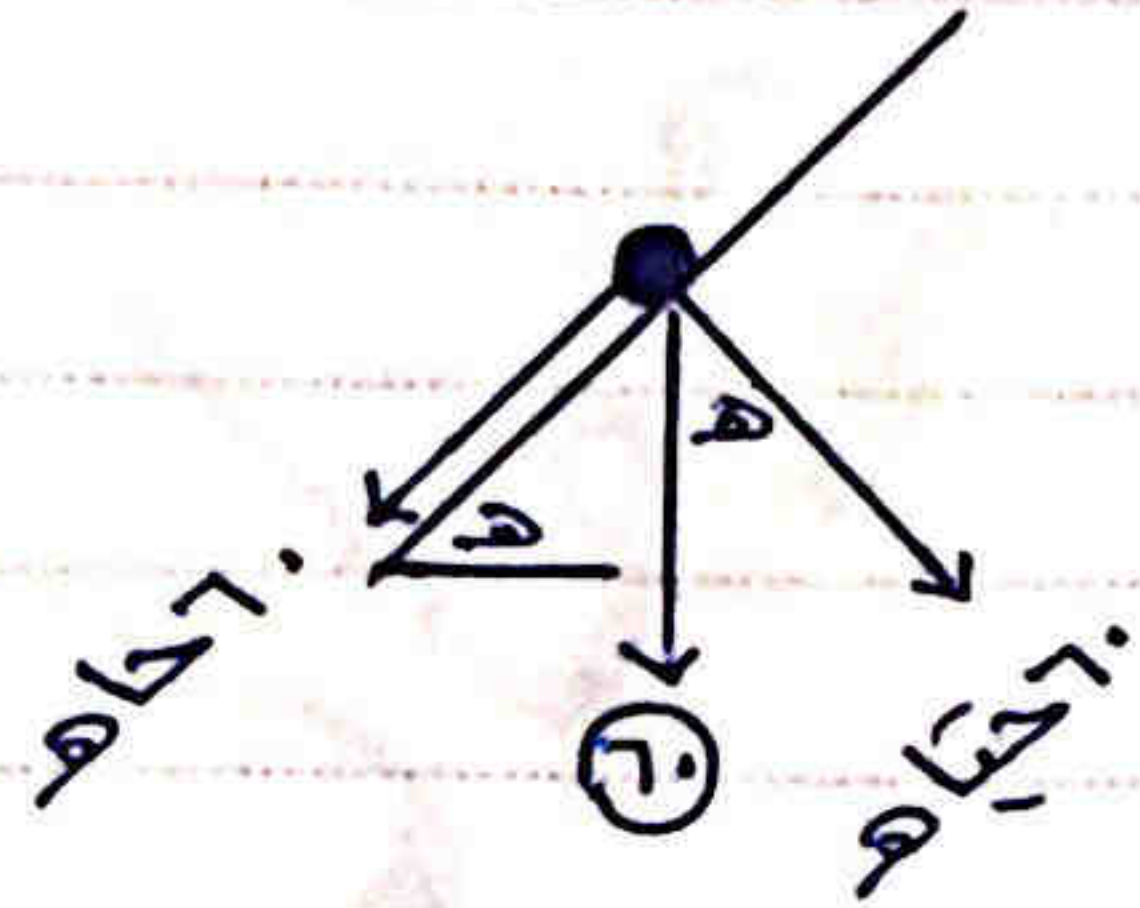
ب) ماذا يحدث لمركبة الوزن في اتجاه الحبلين المذكورين اذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٥°.

الحل

٥° ٥°
١٧٠°
٨٥ ٨٥
و٢ و١
٢٠

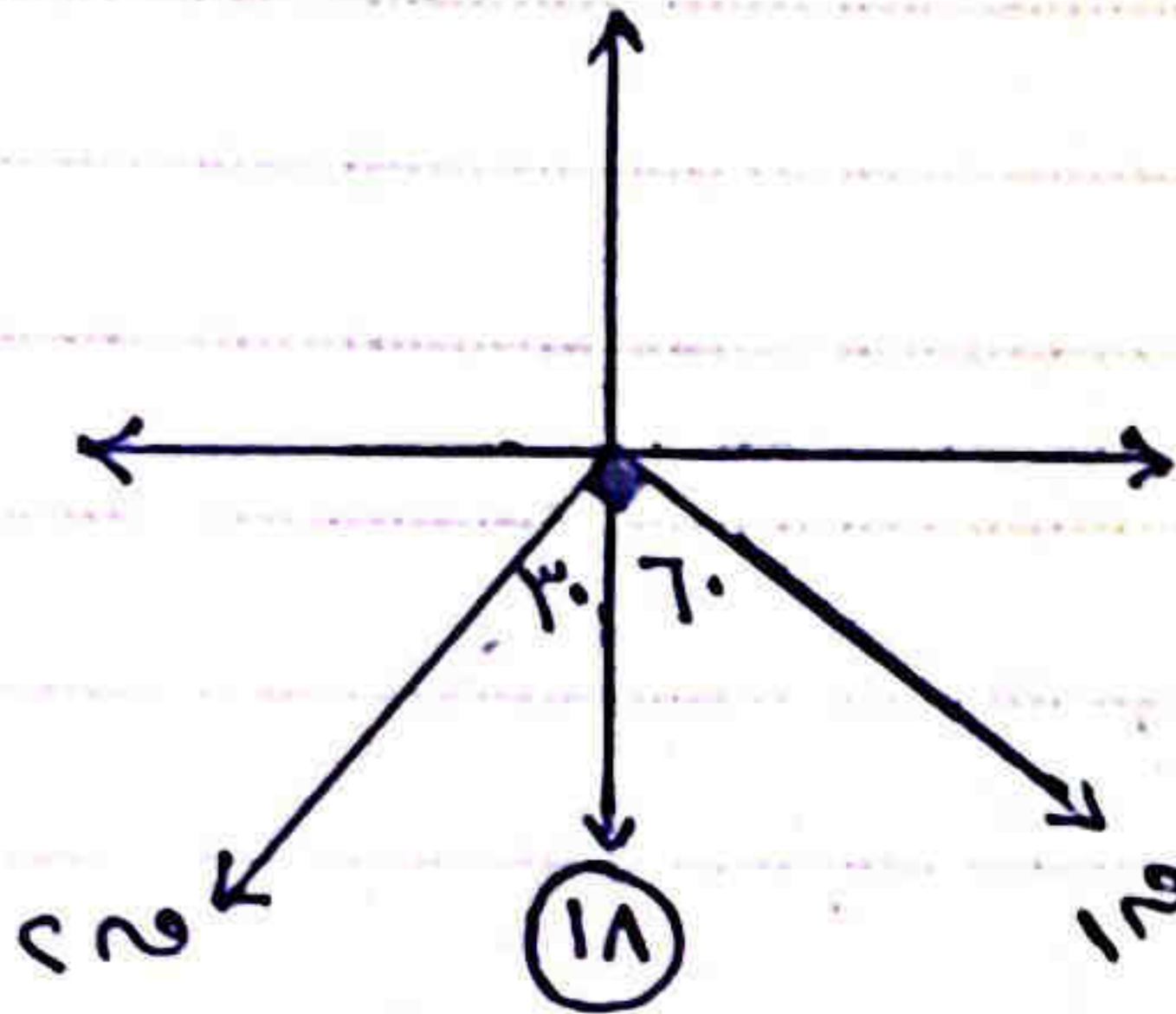
■ و١ = و٢ = $\frac{\text{٢٠ جا ٨٥}}{\text{جا(٨٥+٨٥)}}$

≃ ١١٤,٧٤ نيوتن #

■ عندما تقل الزاوية مع الأفقي عن ٥° فان مقدار مركبة الوزن في اتجاه الحبلين يزداد الى أن يصبح لا نهائياً "عندما يكون الحبل أفقياً".

مثال جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوع على مستوٍ مائل يميل على الأفقي بزاوية هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقداراً مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه؟

الحل

- ق١ = ٦٠ جا هـ = ٦٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣٦ نيوتن
- ق٢ = ٦٠ جتا هـ = ٦٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤٨ نيوتن

مثال قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب أوجد مركبتيها في اتجاهي ٦٠° شرق الجنوب، ٣٠° غرب الجنوب

الحل

- الحل الأول

ق١ = $\frac{١٨ جا ٣٠}{جا (٣٠ + ٦٠)}$ = ٩ نيوتن

ق٢ = $\frac{١٨ جا ٦٠}{جا (٣٠ + ٦٠)}$ = ٩ $\sqrt{٣}$ نيوتن

- الحل الثاني:

ق١ = ١٨ جتا ٦٠ = ٩ نيوتن

ق٢ = ١٨ جا ٦٠ = ٩ $\sqrt{٣}$ نيوتن

- الحل الثالث

ق٢ = ١٨ جتا ٣٠ = ٩ $\sqrt{٣}$ نيوتن

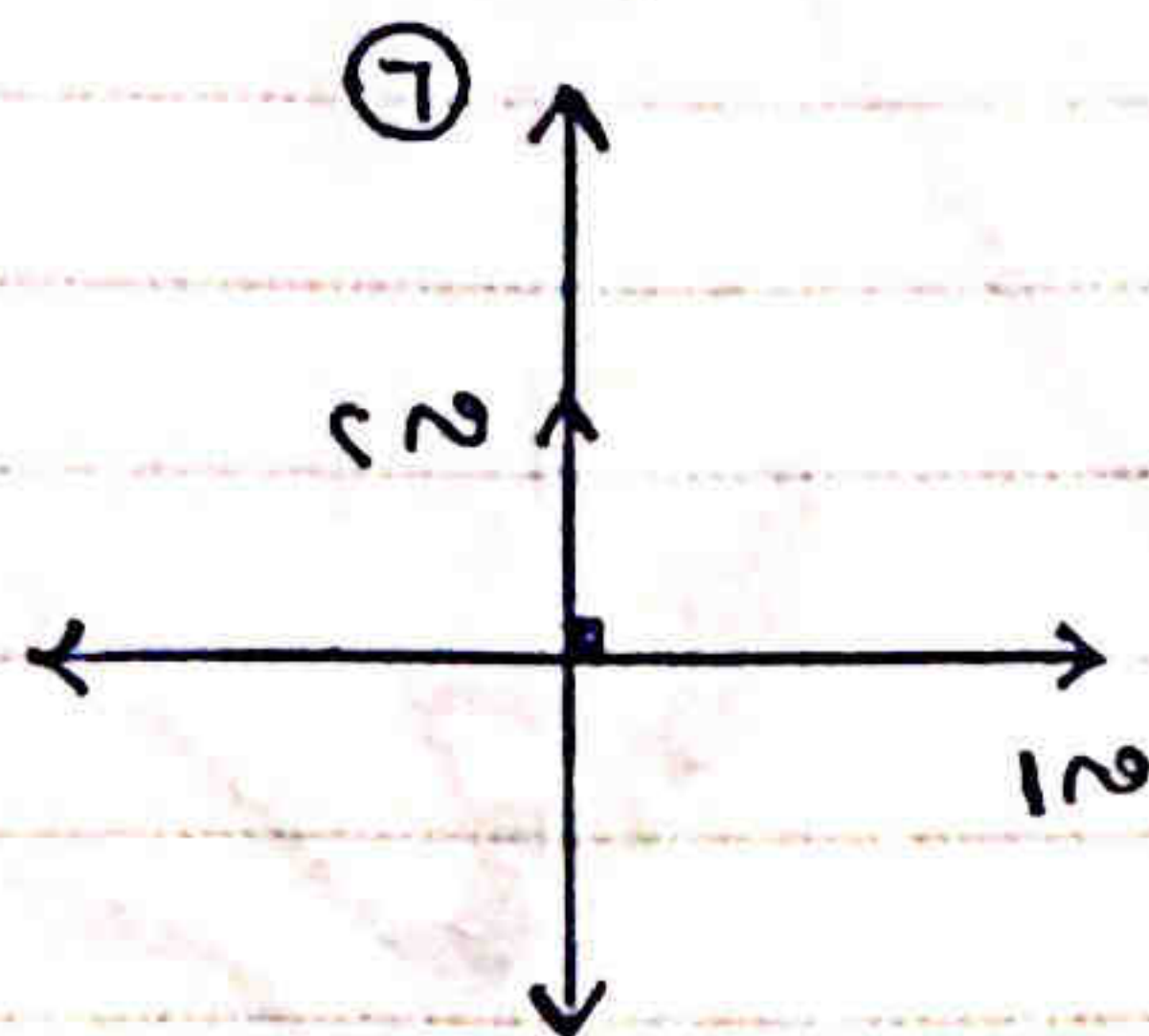
ق١ = ١٨ جا ٣٠ = ٩ نيوتن

Scanned with CamScanner

مثال قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها الى مركبتين متعامدتين فان مركبتها في اتجاه الشرق تساوي ..... نيوتن

الحل

ق٢ = ٦ جتا ٠ = ٦×١ = ٦ نيوتن

ق١ = ٦ جا ٠ = ٦×٠ = ٠ نيوتن

■ نطلع منها بملحوظة حلوة جدا"

← اذا كانت القوتان متعامدتان والمحصلة منطبقة على أحد القوتين فان المحصلة تساوي القوة المنطبقة عليها أما القوة الاخرى تساوي صفر.

مثال يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين تعمل بحبلين مثبتين في خطاف في نقطة م على البارجة وقياس الزاوية بينهما ٧٥° فاذا كانت زاوية ميل احد الجبلين على $\overleftarrow{مد}$ = ٤٥° وكانت محصلة القوة المبذولة لسحب البارجة ٥٠٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overleftarrow{مد}$ أوجد الشد في الحبلين؟

الحل

■ ش١ = $\frac{٥٠٠٠ \text{ حا } ٣٠}{\text{حا}(٣٠+٤٥)}$ = ٢٥٨٨,٢ نيوتن

■ ش٢ = $\frac{٥٠٠٠ \text{ حا } ٤٥}{\text{حا}(٣٠+٤٥)}$ = ٣٦٦٠,٣ نيوتن

Scanned with CamScanner

مثال: اذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية θ فان مركبة وزنه في اتجاه المستوى يساوي ......

(أ) و (ب) وجا θ (ج) وجتا θ

مثال: اذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل يميل على الرأسي بزاوية θ فان مركبة وزنه في اتجاه المستوى يساوي ......

(أ) و (ب) وجا θ (ج) وجتا θ

ق١ = و جا (٩٠ − θ)

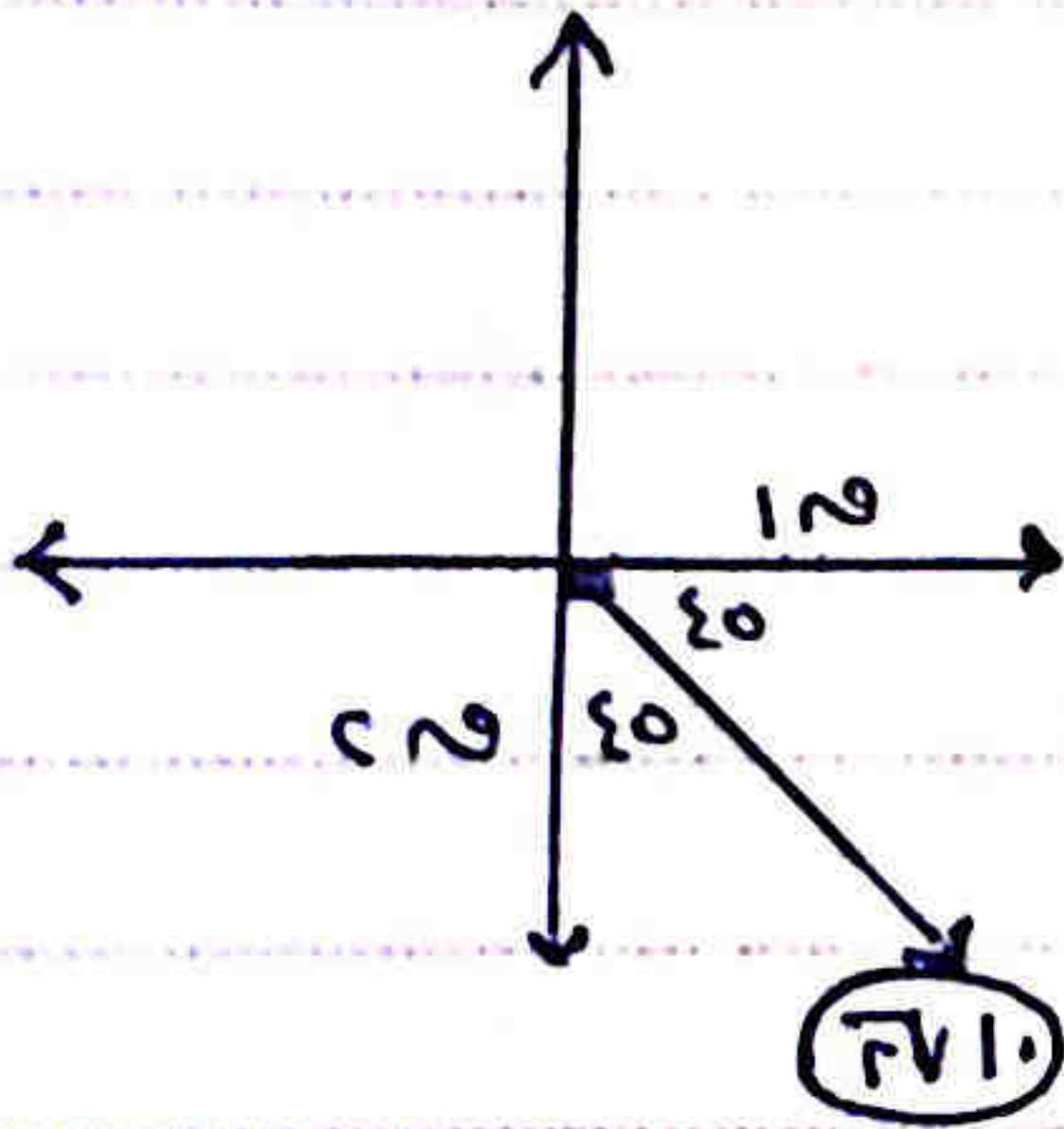
= و جتا θ #

مثال: قوة مقدارها ١٠√٢ ث.جم تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها الى مركبتين متعامدتين فان مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب تساوي ...... ث.جم

(أ) ١٥ (ب) ١٠ (ج) ٢٣

الحل

ق٢ = ١٠√٢ جتا ٤٥

= ١٠√٢ × √٢/٢ = ١٠ ث.جم

خطر: رسمنا ١٠√٢ في المنتصف لأن الباشا لم يحدد أو لم يعطيني زاوية.

Scanned with CamScanner

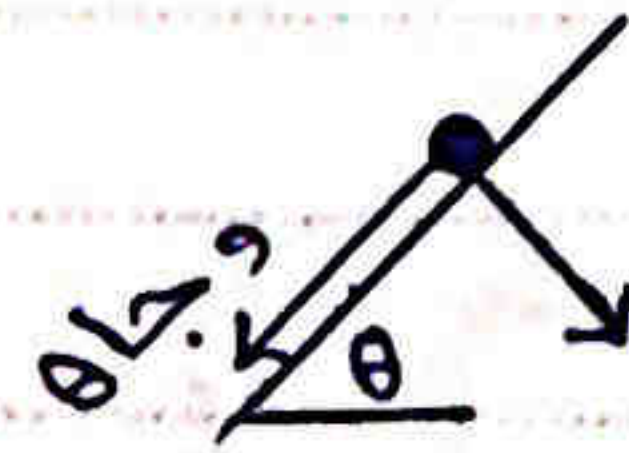
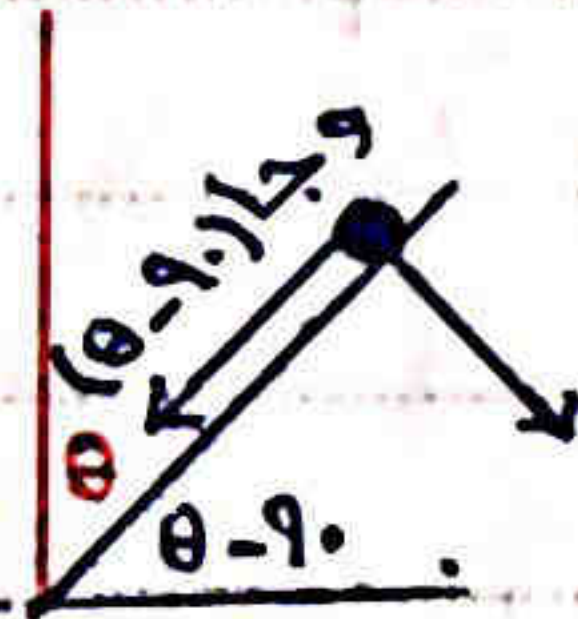
مثال وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار مركبتي وزن الجسم في اتجاه خط أكبر ميل المستوى والاتجاه العمودي عليه؟

الحل

- م١ (في اتجاه خط أكبر ميل)

= ٥٠ حا ٣٠ = ٥٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٢٥ نيوتن

- م٢ (العمودي على المستوى)

= ٥٠ حتا ٣٠ = ٥٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال في الشكل المقابل مركبة القوة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ تساوي .... نيوتن؟

الحل

م (اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$) = ١٠ جتا هـ

= ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٦ نيوتن

Scanned with CamScanner

③ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة:

- الشرط اللازم والكافي لاتزان مجموعة من القوى هو أن تمثل هذه القوى هندسياً بأضلاع مضلع مغلق مأخوذة في ترتيب دوري واحد.

- اذا كان: $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ مجموعة قوى تؤثر جميعاً في نقطة مادية فإن:

← $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} + \overleftarrow{ق_٤}$

= (س ، ص) صورة متجهة

= س $\overleftarrow{س}$ + ص $\overleftarrow{ص}$

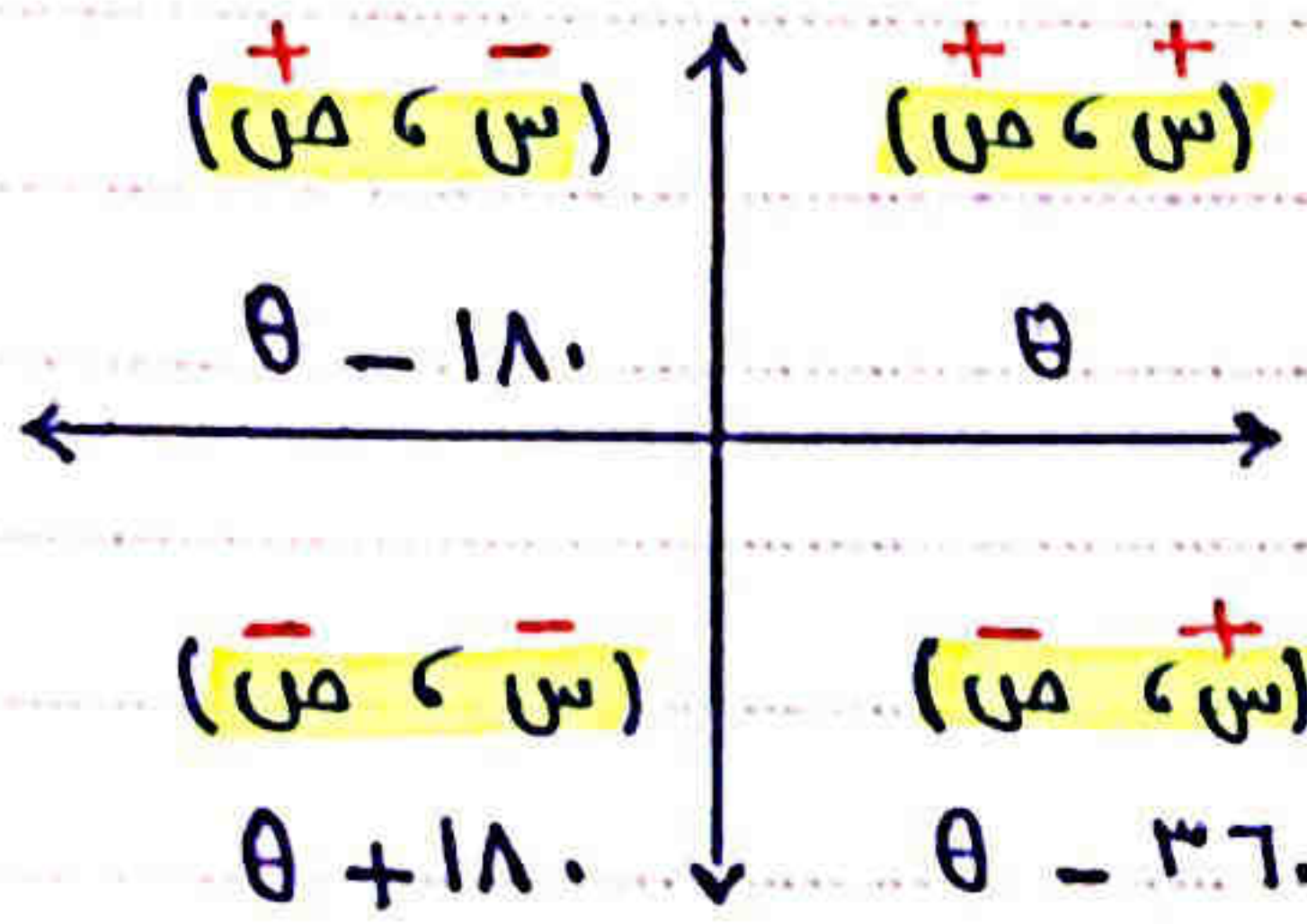
← $\| \overleftarrow{ح} \| = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ← مقداراً

← ظا هـ $= \frac{ص}{س}$ ← اتجاهاً

حيث (هـ) زاوية ميل المحصلة على محور السينات.

- خطوات الحل:
- ارسم المسألة في نظام احداثي متعامد
- حدد كل قوة والزاوية التي تصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- س = ق جتا هـ + ...
  ص = ق جا هـ + ...
- ح $= \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

- احترس: ظا هـ $= \frac{ص}{س}$ ركز معايا تروح على الحاسبة تكتب shift tan $(\frac{ص}{س})$ بدون الاشارة طبعاً يعني تكتبها على الحاسبة بالموجب وتروح تحدد اشارة س ، ص في أي ربع من خلال الشكل التالي

$(\overset{-}{س} ، \overset{+}{ص})$	$(\overset{+}{س} ، \overset{+}{ص})$
$١٨٠ - \theta$	θ
$(\overset{-}{س} ، \overset{-}{ص})$	$(\overset{+}{س} ، \overset{-}{ص})$
$١٨٠ + \theta$	$٣٦٠ - \theta$

- ملاحظات هامة جداً:

← اذا كانت القوى متزنة فإن:
$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠} = (٠ ، ٠)$ ∴ س = ص = ٠

← اذا كانت:
- $\overleftarrow{ح} = س \overleftarrow{س}$ ∴ ص = ٠
  ، هـ = ٠ أو هـ = ١٨٠°
- $\overleftarrow{ح} = ص \overleftarrow{ص}$ ∴ س = ٠
  ، هـ = ٩٠° أو هـ = ٢٧٠°

← اذا كانت: المحصلة في الصورة القطبية ح = (ل ، θ) فإن
- س = ∥ح∥ جتا θ ، ص = ∥ح∥ جا θ

Scanned with CamScanner

مثال اذا كانت ق١ = (٣، ٤)، ق٢ = (٢، ٦)
، ق٣ = (١، -٢)، ق٤ = (-٣، -٣)
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

الحل

ح = ق١ + ق٢ + ق٣ + ق٤
= (٣، ٤) + (٢، ٦) + (١، -٢) + (-٣، -٣)
= (٣، ٤)
= ٣س + ٤ص
ح = √(٩+١٦) = ٥ وحدة قوة

طا هـ = ص / س = ٤ / ٣

∴ هـ = ٥٣° ٧′ ٤٨″ #

مثال اذا كانت القوى: ق١ = ٥س - ٤ص
، ق٢ = -٦س + م ص، ق٣ = ب س + ٧ص
متلاقية في نقطة ومتزنة أوجد قيمة م، ب

الحل

∵ القوى متزنة
∴ ح = ٠
(٥-٦+ب ، -٤+م+٧) = (٠، ٠)
-١+ب = ٠ ∴ ب = ١
٣ + م = ٠ ∴ م = -٣

مثال أثرت القوى ٨، ٤√٣، ٦√٣، ١٤ نيوتن في نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة في اتجاه دوري واحد أوجد محصلة هذه القوى مقداراً واتجاهاً.

الحل

(٨، ٠°)، (٤√٣، ٣٠°)، (٦√٣، ١٥٠°)
، (١٤، ٢٤٠°)

س = ٨ حتا٠ + ٤√٣ حتا٣٠ + ٦√٣ حتا١٥٠
+ ١٤ حتا٢٤٠ = -٢

ص = ٨ حا٠ + ٤√٣ حا٣٠ + ٦√٣ حا١٥٠
+ ١٤ حا٢٤٠ = -٢√٣

▪ ح = √(٤+١٢) = ٤ نيوتن

▪ طا هـ = ص / س = -٢√٣ / -٢ ← هـ = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

Scanned with CamScanner

مثال ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٦ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ١٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية في الاتجاهات ٣٠° شمال الشرق ، ٦٠° شمال الغرب ، الجنوب أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل

(٦ ، ٣٠°) ، ($٤\sqrt{٣}$ ، ١٢٠°) ، (١٠ ، ٢٧٠°)

س = ٦ جتا ٣٠ + $٤\sqrt{٣}$ جتا ١٢٠ + ١٠ جتا ٢٧٠

= $\sqrt{٣}$

ص = ٦ جا ٣٠ + $٤\sqrt{٣}$ جا ١٢٠ + ١٠ جا ٢٧٠

= -١

- ح = $\sqrt{٣ + ١}$ = ٢ نيوتن
- ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ [س+ ، ص-]

∴ هـ = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠° #

مثال خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، $٥\sqrt{٢}$ ، $٧\sqrt{٢}$ ، ٧ نيوتن تعمل في الشرق ، الشمال ، الشمال الغربي ، الجنوب الغربي ، والجنوب على الترتيب اثبت أن المجموعة متزنة.

الحل

(١٢ ، ٠°) ، (٩ ، ٩٠°) ، ($٥\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) ، ($٧\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°) ، (٧ ، ٢٧٠°)

س = ١٢ جتا ٠ + ٩ جتا ٩٠ + $٥\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥ + $٧\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥ + ٧ جتا ٢٧٠

= ٠

ص = ١٢ جا ٠ + ٩ جا ٩٠ + $٥\sqrt{٢}$ جا ١٣٥ + $٧\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥ + ٧ جا ٢٧٠

= ٠

∴ المجموعة متزنة #

اعداد الاستاذ / عماد صلاح
معلم الرياضيات والاحصاء
01030252232

Scanned with CamScanner

مثال: اذا كانت $\overrightarrow{ق_1} = ٥\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٧\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص}$

فإن: $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ... وحدة قوة

(أ) ١٢ (ب) ٥ (ج) ١٣ (د) $\sqrt{٣٧}$

الحل

$\|\overrightarrow{ح}\| = \sqrt{(٥+٧)^2 + (٠-٥)^2}$

$= \sqrt{١٤٤ + ٢٥} = ١٣$ #

مثال: اذا كانت $\overrightarrow{ق_1} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٤\overrightarrow{س} - ب\overrightarrow{ص}$ ومحصلتهم $\overrightarrow{ح} = ٦\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص}$

فإن (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، -١) (ب) (-١ ، ١) (ج) (-١ ، -١) (د) (١ ، ١)

الحل

$\overrightarrow{ح}$ في الصورة الاحداثية (٦ ، -٤)

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3}$

(٦ ، -٤) = (٣ + أ + ٤ ، -٢ - ١ - ب)

(٦ ، -٤) = (٧ + أ ، -٣ - ب)

٧ + أ = ٦ ∴ أ = -١

-٣ - ب = -٤ ∴ ب = ١

مثال: ثلاث قوى مستوية ومتساوية في المقدار تؤثر في نقطة مادية وكان خط عمل القوة الثانية يصنع مع اتجاه القوتين الأولى والثالثة زاويتين قياس كل منهما ٦٠° أوجد المحصلة؟

الحل

(ق ، ٠°) ، (ق ، ٦٠°) ، (ق ، ١٢٠°)

س = ق جتا٠ + ق جتا٦٠ + ق جتا١٢٠
= ق

ص = ق جا٠ + ق جا٦٠ + ق جا١٢٠
= $\sqrt{٣}$ ق

ح = $\sqrt{ق^2 + ٣ق^2} = \sqrt{٤ق^2} = ٢ق$

ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{٣}ق}{ق}$
∴ هـ = ٦٠°

Scanned with CamScanner

مثال: ا ب جـ مثلث متساوي الأضلاع فيه م نقطة تلاقي المتوسطات أثرت القوى التي مقاديرها ١٥، ٢٠، ٢٥ نيوتن في نقطة مادية في الاتجاهات م جـ، م ب، م ا أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

(٢٥، ٩٠°) ، (١٥، ٢١٠°) ، (٢٠، ٣٣٠°)

س = ٢٥ حتا ٩٠ + ١٥ حتا ٢١٠ + ٢٠ حتا ٣٣٠

= ٢٫٥ $\sqrt{٣}$

ص = ٢٥ حا ٩٠ + ١٥ حا ٢١٠ + ٢٠ حا ٣٣٠

= ٧٫٥

ح⃗ = ٢٫٥ $\sqrt{٣}$ س⃗ + ٧٫٥ ص⃗

ح = $\sqrt{(٢٫٥\sqrt{٣})^2 + (٧٫٥)^2}$

= ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن #

طا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٧٫٥}{٢٫٥\sqrt{٣}}$

∴ هـ = ٦٠° #

مثال أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ ب جـ بحيث ب هـ = ٥سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤√٢ ، ٩ ث.جم في الاتجاهات أ ب ، أ هـ ، جـ أ ، أ ء على الترتيب أوجد محصلة هذه القوى

الحل

(٢ ، ٠) ، (١٣ ، ى) ، (٤√٢ ، ٢٢٥) ، (٩ ، ٩٠°)

س = ٢حتا٠ + ١٣حتاى + ٤√٢ حتا٢٢٥ + ٩حتا٩٠° = ٢×١ + ١٣×$\frac{١٢}{١٣}$ + ٤√٢×−حتا٤٥ + ٠

س = ٢ + ١٢ − ٤√٢ × $\frac{√٢}{٢}$

س = ١٤ − ٤ = ١٠

بالمثل

ص = ١٠ احسبها انت تفهم

ح = √(١٠٠+١٠٠) = ١٠√٢ ث.جم #

خطر : ▪ حتا (٢٢٥) = حتا(١٨٠+٤٥) = −حتا٤٥°

▪ حا (٢٢٥) = حا(١٨٠+٤٥) = −حا٤٥°

مثال أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٦سم ، و ∈ جـ ء بحيث ء و = ٦سم ، أثرت القوى التي مقاديرها ٦ ، ٢٠ ، ١٣√٢ ، ٦ نيوتن في أ ب ، جـ أ ، أ و ، أ ء على الترتيب أوجد مقدار واتجاه المحصلة؟

الحل

جاهـ = $\frac{٦}{١٠}$

جتاهـ = $\frac{٨}{١٠}$

(٦ ، ٠°) ، (١٣√٢ ، ٤٥°) ، (٢٠ ، ١٨٠+هـ) ، (٦ ، ٩٠°)

س = حل بنفسك

ص = حل بنفسك

ح = √(٩+٩) = ٣√٢ نيوتن

طاهـ = $\frac{٣}{٣}$ ∴ هـ = ٤٥°

خطر : حتا (١٨٠+هـ) = −حتاهـ

حا (١٨٠+هـ) = −حاهـ

Scanned with CamScanner

مثال أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢ $\sqrt{3}$ ، ٦ ، ٢ $\sqrt{3}$ نيوتن في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه المحصلة؟

الحل

(٦ ، ٠°) ، (٢ $\sqrt{3}$ ، ٣٠°) ، (٦ ، ٦٠°) ، (٢ $\sqrt{3}$ ، ٩٠°)

س = ٦ حتا٠ + ٢ $\sqrt{3}$ حتا٣٠
+ ٦ حتا٦٠ + ٢ $\sqrt{3}$ حتا٩٠
= ١٢

ص = ٦ حا٠ + ٢ $\sqrt{3}$ حا٣٠
+ ٦ حا٦٠ + ٢ $\sqrt{3}$ حا٩٠
= ٦ $\sqrt{3}$

$\overrightarrow{ح}$ = ١٢ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\sqrt{3}$ $\overrightarrow{ص}$

ح = $\sqrt{١٤٤ + ١٠٨}$ = ٦ $\sqrt{7}$ نيوتن

طاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٦\sqrt{3}}{١٢}$ [س+ ، ص+]

∴ هـ = ٤٠° ، ٥٣′ #

Scanned with CamScanner

مثال اذا كان:

ق١ = ٥ س + ٣ ص

ق٢ = أ س + ٦ ص

ق٣ = -١٤ س + ب ص

وكانت ح = (١٠√٢ ، $\frac{٣}{٤}$ ط)

أوجد قيمة أ ، ب

الحل

ح = ق١ + ق٢ + ق٣

لكن ح في الصورة القطبية لازم نحولها للصورة الاحداثية

س = ١٠√٢ جتا ١٣٥ = -١٠

ص = ١٠√٢ جا ١٣٥ = ١٠

(-١٠ ، ١٠) = (٥+أ-١٤ ، ٣+٦+ب)

-٩ + أ = -١٠ ∴ أ = -١

٩ + ب = ١٠ ∴ ب = ١

مثال اذا كان ق١ = ٢س + ٣ ص ، ق٢ = س + ص فأوجد مقدار المحصلة

الحل

ح = ق١ + ق٢ = ٣س + ٤ ص

∴ ح = √(٩+١٦) = ٥ وحدة قوة

مثال أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ نيوتن في نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين ٦٠° أوجد قيمة ق ، ك التي تجعل المجموعة متزنة.

الحل

(٥ ، ٠°) ، (٤ ، ٦٠°) ، (ق ، ١٢٠°) ، (٣ ، ١٨٠°) ، (ك ، ٢٤٠°) ، (٧ ، ٣٠٠°)

س = ٥ جتا ٠ + ... + ٧ جتا ٣٠٠°

ص = ٥ جا ٠ + ... + ٧ جا ٣٠٠

هو قال التي تجعل المجموعة متزنة

∴ س = ٠ ← ق + ك = ١٥ ← ①

ص = ٠ ← ق - ك = ٣ ← ②

بجمع ① ، ②

∴ ٢ق = ١٨ ∴ ق = ٩ نيوتن

عوض في المعادلة ①

٩ + ك = ١٥ ∴ ك = ٦ نيوتن

Scanned with CamScanner

مثال ثلاث قوى مقاديرها ٢ث ، ٤ث ، ٦ث تؤثر في نقطة مادية في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع مأخوذة في ترتيب دوري واحد أوجد مقدار واتجاه المحصلة

الحل

٦ث ، ٤ث ، ٢ث ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٦٠

٤ث ، ٣٠ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٣ث ، ٦ث

(٢ث ، ٠°) ، (٤ث ، ١٢٠°) ، (٦ث ، ٢٤٠°)

س = ٢ث حتا٠ + ٤ث حتا١٢٠ + ٦ث حتا٢٤٠

=

ص = ٢ث حا٠ + ٤ث حا١٢٠ + ٦ث حا٢٤٠

=

ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = ...

طاهـ = $\frac{ص}{س}$

∴ هـ = ... #

المثال ده ليك حل انت أصل أنا هرتاح حله بنفسك

حل آخر

٦ث ، ٦٠ ، ٢ث ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٤ث ، ٤ث ، ٢ث

٦ث ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٤ث ، ٢ث

(٦ث ، ٦٠°) ، (٤ث ، ١٨٠°) ، (٢ث ، ٣٠٠°)

كمل انت بقى يا غالي .

Scanned with CamScanner

مثال أ ب ج د مربع طول ضلعه ٥ سم ، ل منتصف ب ج ، م منتصف ج د ، أثرت القوى ١٨ ، ٥√٥ ، ٣√٢ ، ٦√٥ ، ٣٥ نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات أب ، أل ، أم ، أد ، جأ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى؟

الحل

(١٨ ، ٠) ، (٥√٥ ، هـ)

(٦√٥ ، ٩٠ - هـ)

(٣٥ ، ٩٠)

(٣√٢ ، ٢٢٥)

س = ١٨ جتا ٠ + ٥√٥ جتا هـ + ٦√٥ جتا (٩٠ - هـ) + ٣٥ جتا ٩٠ + ٣√٢ جتا ٢٢٥

س = ١٨ + ٥√٥ × ٥ / ٢,٥√٥ + ٦√٥ جاهـ + ٣٥ × ٠ + ٣√٢ × $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

جاهـ = ٢,٥ / ٢,٥√٥

∴ س = ٣١

بالمثل

ص = ١٨ جا ٠ + ٥√٥ جاهـ + ٦√٥ جا (٩٠ - هـ) + ٣٥ جا ٩٠ + ٣√٢ جا ٢٢٥

ص = ١٨ × ٠ + ٥√٥ × ٢,٥ / ٢,٥√٥ + ٦√٥ جتاهـ + ٣٥ × ١ + ٣√٢ × $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

جتاهـ = ٥ / ٢,٥√٥

∴ ص = ٤٩

- ح = √(٣١² + ٤٩²) = ٤١√٢ نيوتن

- ظا θ = ص / س = ٤٩ / ٣١

∴ θ = ٥٧° ٤١' #

Scanned with CamScanner

مثال أ ب حـ Δ متساوي الساقين فيه ق(∠أ) = ١٢٠° أثرت القوى التي مقاديرها ٦ ، ٦√٣ ، ٦ نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات توازي أب ، حـ ب ، أ حـ على الترتيب اثبت أن مقدار المحصلة = ١٢ نيوتن في اتجاه أب

الحل

أ ، ١٢٠ ، ٦ ، ٦ ، ٣٠ ، ٣٠ ، حـ ، ب ، ٦√٣

٣٠ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٦√٣ ، ٦ ، ٦

(٦√٣ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٠°) ، (٦ ، ٣٢٠°)

س = حل بنفسك .... = ٦√٣

ص = حل بنفسك .... = −٦

ح = $\sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 36}$ = ١٢ نيوتن

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-6}{6\sqrt{3}}$ [س+ ، ص−]

الزاوية تقع في الربع الرابع

∴ هـ = ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠° #

Scanned with CamScanner

٤) الإتزان :

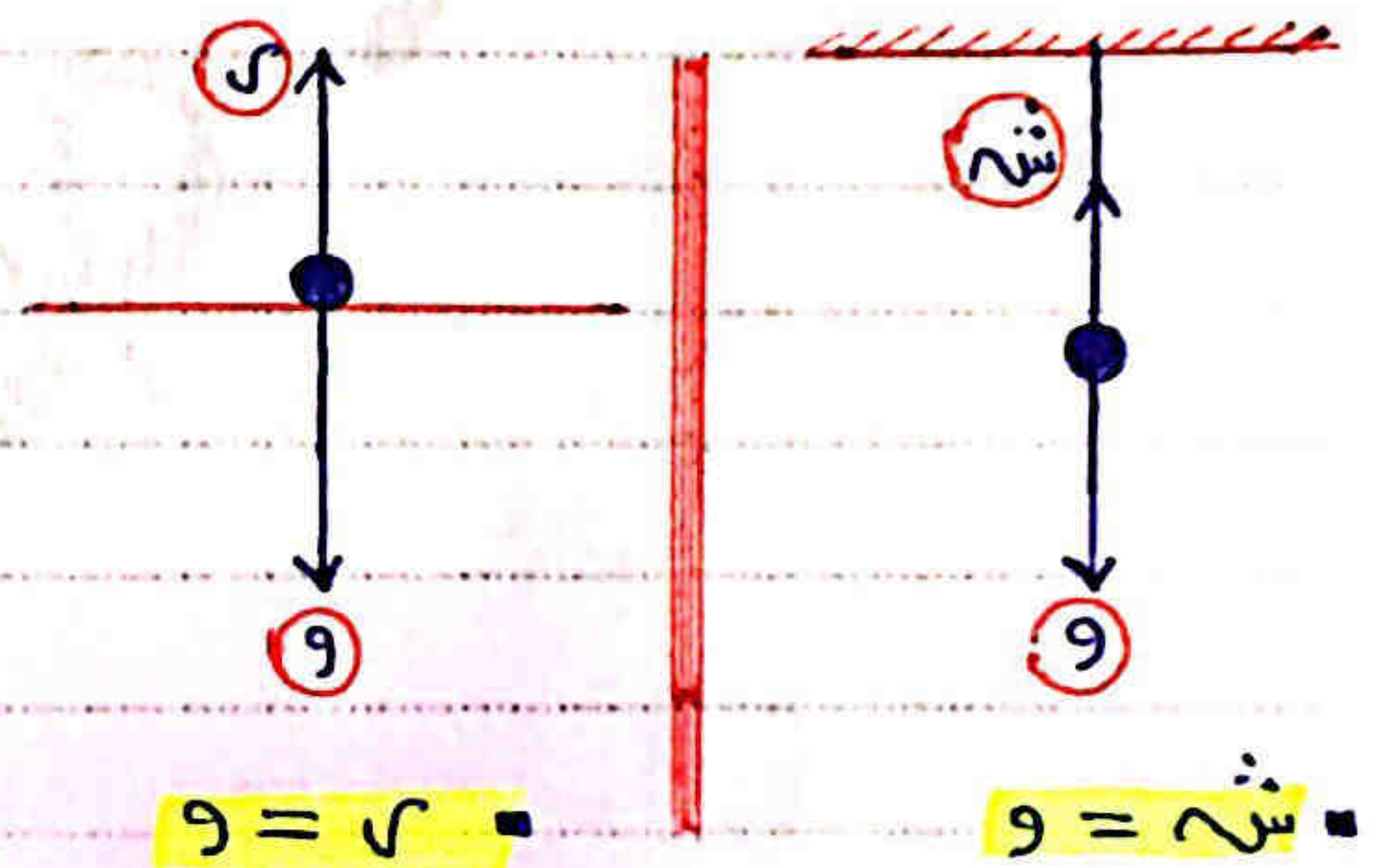
← أولاً الاتزان تحت تأثير قوتان :

شروط اتزان جسم تحت تأثير قوتان أن تكون القوتان :

- متساويتان في المقدار ← ($ق_1 = ق_2$)
- متضادتان في الاتجاه ← ($\vec{ق_1} = -\vec{ق_2}$)
- خطي عمليهما على استقامة واحدة.

مثال على الاتزان تحت تأثير قوتان :

← جسمان أحدهما على نضد أفقي والآخر معلق بخيط خفيف.

- ش = و
- ر = و

حيث :

ش ← الشد في الحبل

و ← وزن الجسم

ر ← رد فعل الجسم على النضد

ملاحظات هامة :

- اذا كانت البكرة ملساء فإن الشد في فرعي الخيط يكونان متساويان.

← ثانياً الاتزان تحت تأثير ثلاث قوى :

قاعدة ① :

اذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة في ترتيب دوري واحد فإن هذه القوى تكون متزنة

خطر :

- لكي تتزن القوى الثلاث يجب أن تكون أكبر قوة أصغر من (مجموع القوتين الأخريين)
- اذا اتزن الجسم تحت تأثير القوى الثلاث فإن : المحصلة بين أي قوتين تساوي القوة الثالثة مقداراً ومضادة لها في الاتجاه ولها نفس خط العمل

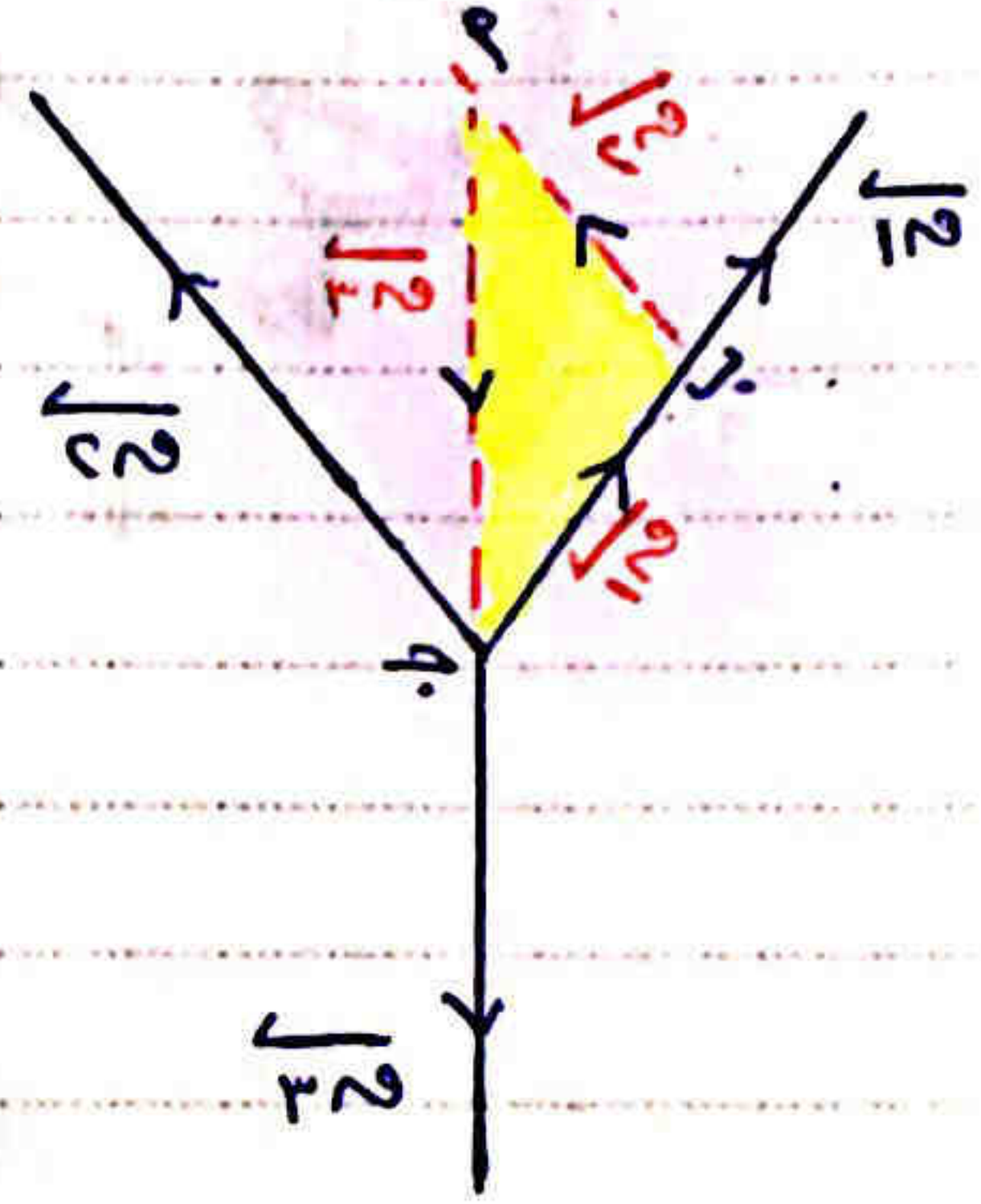
- $\vec{ح_{12}} = \vec{ق_3}$
- $\vec{ح_{23}} = \vec{ق_1}$
- $\vec{ح_{13}} = \vec{ق_2}$

Scanned with CamScanner

قاعدة ② :

▪ قاعدة مثلث القوى :

← اذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى وفي اتجاه دوري واحد فان أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

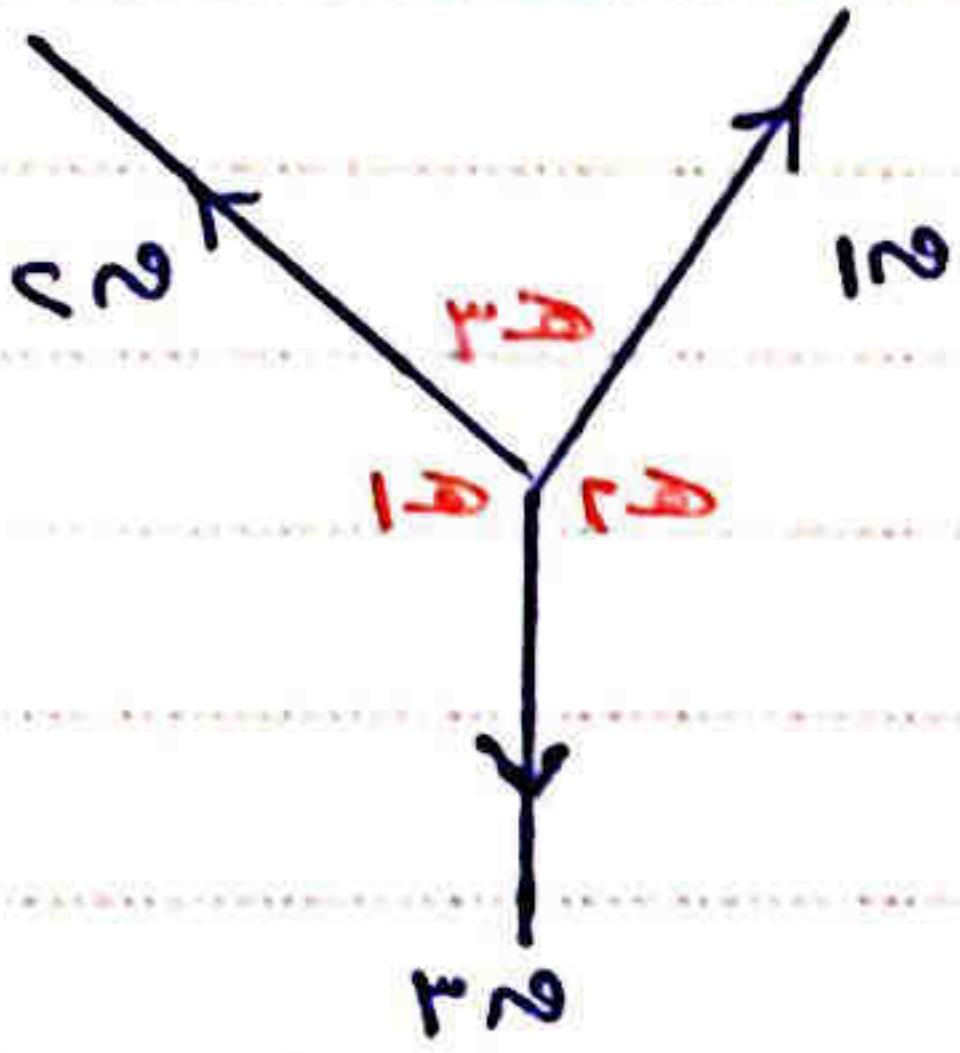
$$\therefore \frac{ق_1}{ب جـ} = \frac{ق_2}{م ب} = \frac{ق_3}{م جـ}$$

• ركز يا حبيبي اللي يميز قاعدة مثلث القوى لما يكون المثال مفيش فيه غير أطوال أضلاع فقط مفيش زوايا خالص ولازم يكون معانا الأضلاع الثلاثة.

• المثلث المظلل هو مثلث القوى.

قاعدة ③ :

▪ قاعدة لامي :

← اذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة فان مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين:

$$\therefore \frac{ق_1}{جا هـ_1} = \frac{ق_2}{جا هـ_2} = \frac{ق_3}{جا هـ_3}$$

• ركز في الحاجات التافهة دي :

← جا (١٨٠ - هـ) = جا هـ

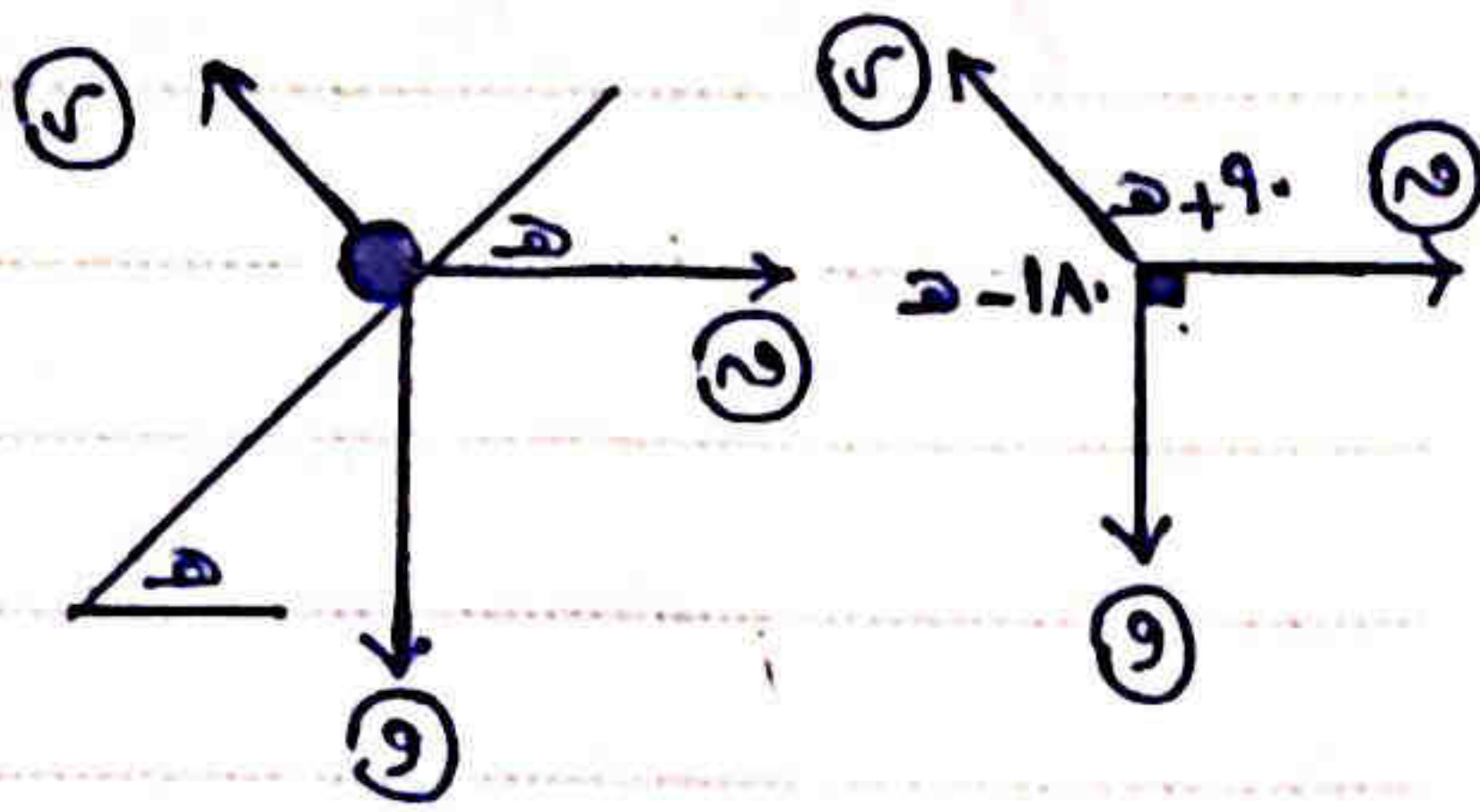
جتا (١٨٠ - هـ) = - جتا هـ

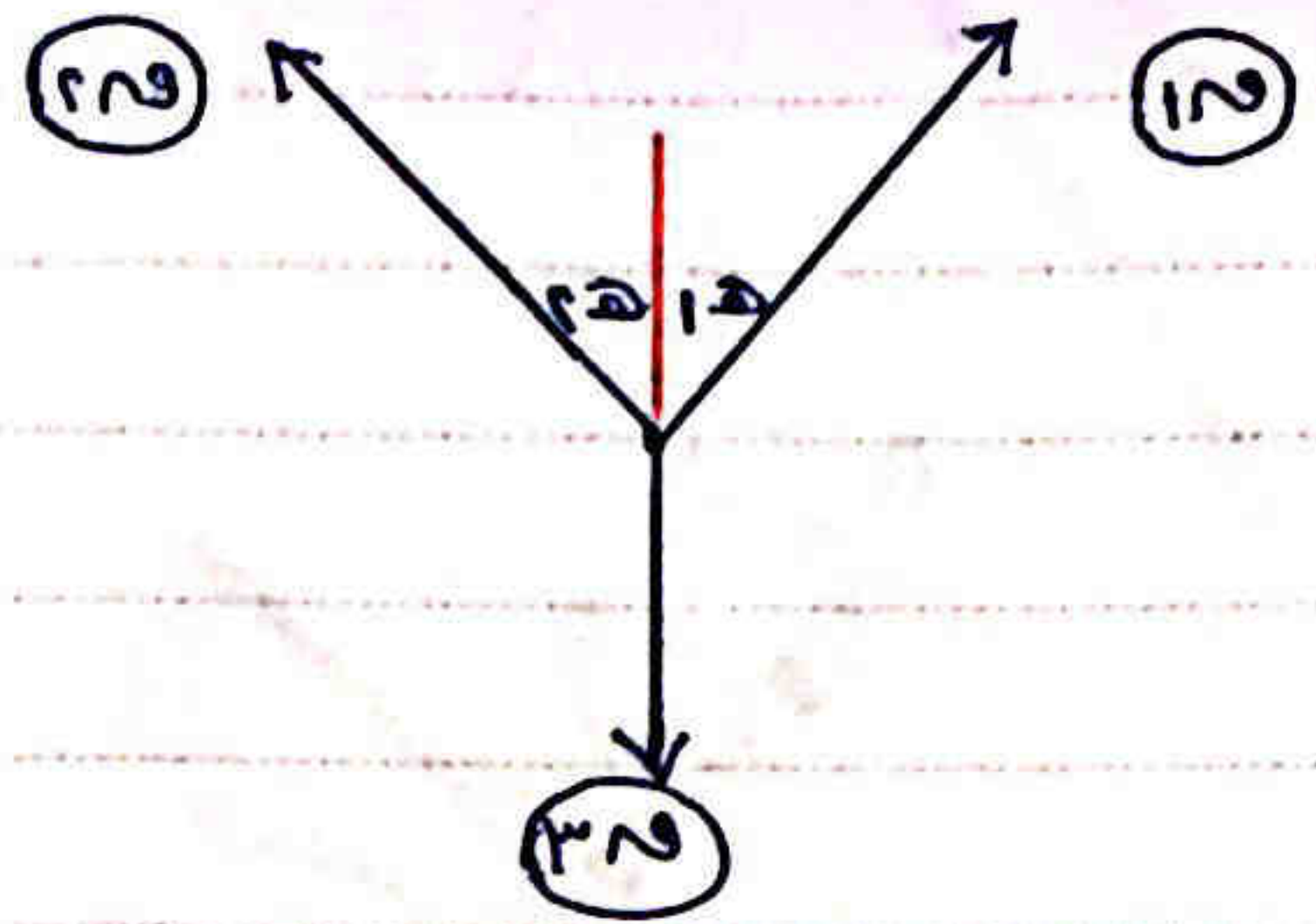
ظا (١٨٠ - هـ) = - ظا هـ

← جا (٩٠ + هـ) = جتا هـ

جتا (٩٠ + هـ) = - جا هـ

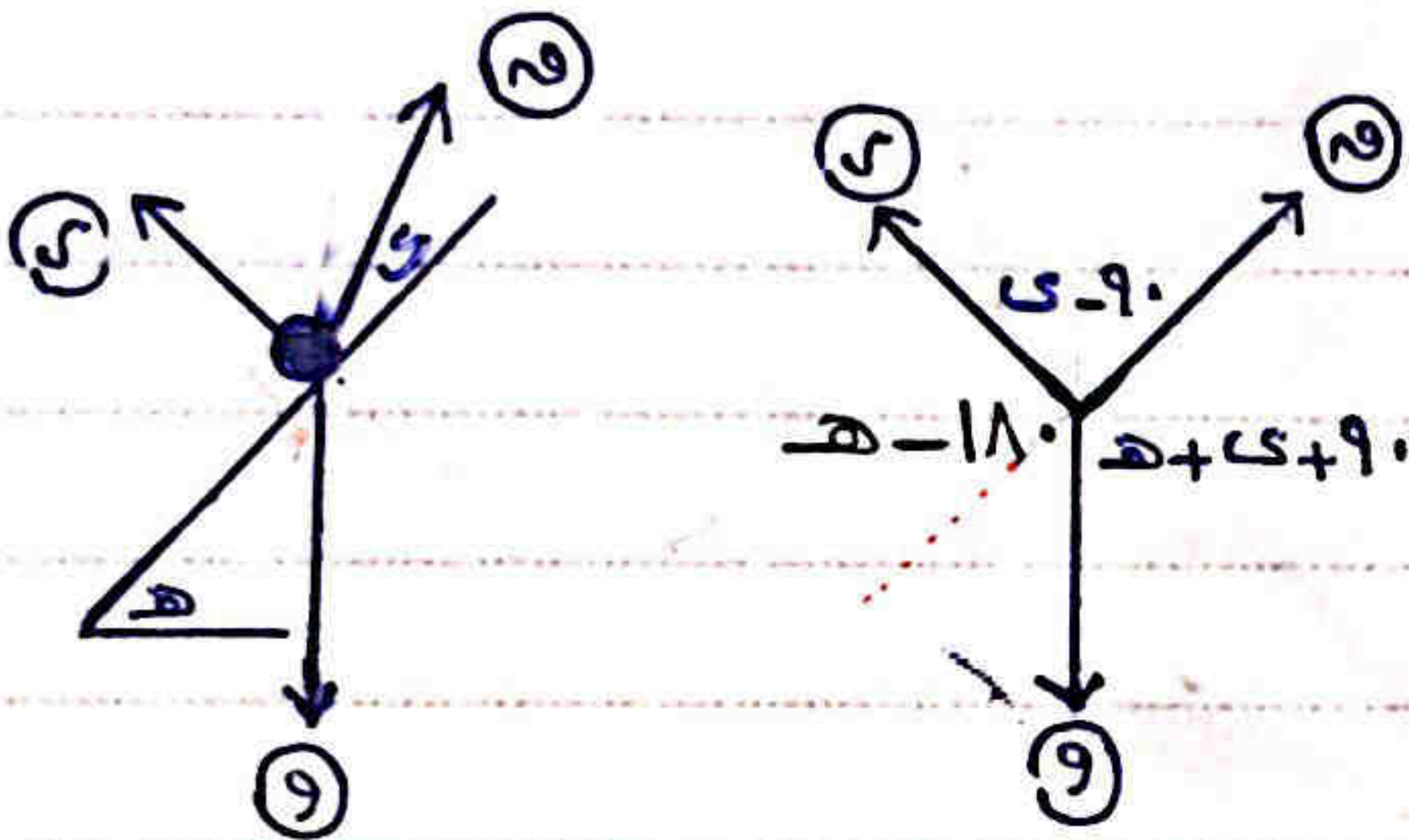
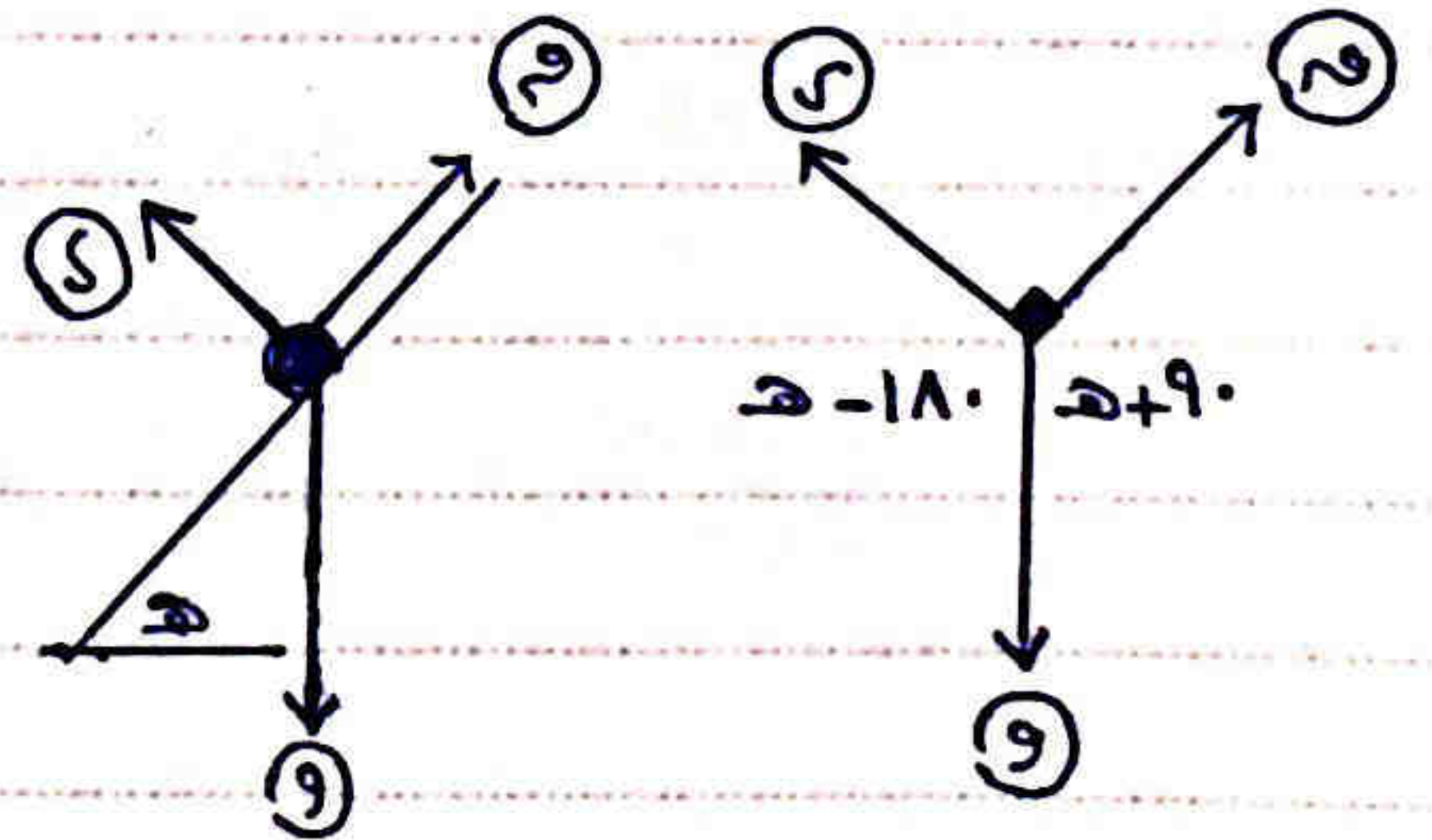
ظا (٩٠ + هـ) = - ظتا هـ

Scanned with CamScanner

▪ اذا مُد خط عمل احدى القوى الثلاثة ليقسم الزاوية بين خطى عمل القوتين الآخرتين الى زاويتين هذه الحالة

حالة خاصة لقاعدة لامى

$$\frac{ق_1}{حا هـ_2} = \frac{ق_2}{حا هـ_1} = \frac{ق_3}{حا(هـ_1+هـ_2)}$$

▪ مُلخص لحالات المستوى المائل الأملس

① القوة فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى

② القوة أفقية

③ القوة تميل بزاوية ى لأعلى

ملاحظات غاية فى الأهمية:

▪ أقل عدد من القوى المستوية المتساوية فى المقدار والتى يمكن أن تتزن تساوى ٢

▪ أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية فى المقدار والتى يمكن أن تتزن تساوى ٣

هامة : قاعدة مثلث القوى المعمودى

كل قوة تتناسب مع طول الضلع العمودية عليه.

Scanned with CamScanner

مثال ثلاث قوى مستوية مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ١٨ نيوتن متلاقية في نقطة واحدة ومتزنة فاذا كان قياس الزاوية بين خطي عمل القوتين الأولى والثانية ٩٠° ، وبين الثانية والثالثة ١٢٠° أوجد $ق_1$ ، $ق_2$

الحل

• قاعدة لامي

$$\frac{ق_1}{حا ١٢٠} = \frac{ق_2}{حا ١٥٠} = \frac{١٨}{حا ٩٠}$$

$\leftarrow$ $ق_1 = \frac{١٨ حا ١٢٠}{حا ٩٠} = ٩\sqrt{٣}$ نيوتن

$\leftarrow$ $ق_2 = \frac{١٨ حا ١٥٠}{حا ٩٠} = ٩$ نيوتن #

مثال اذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٧ نيوتن فأوجد قياس الزاوية بين القوتين الأوليين ؟

الحل

$ق_1 = ٣$ ، $ق_2 = ٥$ ، $ق_3 = ٧$

• $ح_{١٢} = ق_3 = ٧$

$\leftarrow$ $ح_{١٢}^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + ٢ ق_1 ق_2$ جتا ى

$٤٩ = ٩ + ٢٥ + ٣٠$ جتا ى

٣٠ جتا ى = ١٥

جتا ى $= \frac{١}{٢}$ $\therefore$ ى = ٦٠°

طبعاً ممكن طالب متميز يحسب $ح_{٣٢}$ أو $ح_{٣١}$ بس كدا

Scanned with CamScanner

مثال: اذا كانت $ق_١ = (٢، ٢، م)$ ، $ق_٢ = (٤، ٥، ١)$ ، $ق_٣ = (١، ب، ١)$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة واحدة ومتزنة أوجد قيمة م ، ب

الحل

- المجموعة متزنه والله مش من عندي لا سمح الله لكن هو قال كدا

$$\therefore ق_١ + ق_٢ + ق_٣ = (٠، ٠، ٠)$$

$$(٢ + ١ + ب ، ٢ + م + ٤ + ١) = (٠، ٠، ٠)$$

$$\therefore ٣ + ب = ٠ \leftarrow ب = -٣$$

$$٥ + م = ٠ \leftarrow م = -٥$$

مثال: اذا كانت القوة $\overleftarrow{ق_٣}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فان مقدار محصلة القوى الثلاث $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ تساوي ....

الحل

- $\overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$

$$\therefore \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣}$$

$$= \overleftarrow{ق_٣} + \overleftarrow{ق_٣}$$

$$\therefore \overleftarrow{ح} = ٢\overleftarrow{ق_٣}$$

- مقدار المحصلة $\|\overleftarrow{ح}\| = ٢ ق_٣$ #

مثال: عُلق ثقل مقداره ٨٠ نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح مائلاً على الحائط بزاوية ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد في الخيط ؟

الحل

- لامي يا لامي (الحالة العامة)

$$\frac{ق}{حا ١٥٠} = \frac{ش}{حا ١٢٠} = \frac{٨٠}{حا ٩٠}$$

$$ق = \frac{٨٠ حا ١٥٠}{حا ٩٠} = ٤٠ \text{ نيوتن}$$

$$ش = \frac{٨٠ حا ١٢٠}{حا ٩٠} = ٤٠\sqrt{٣} \text{ نيوتن}$$

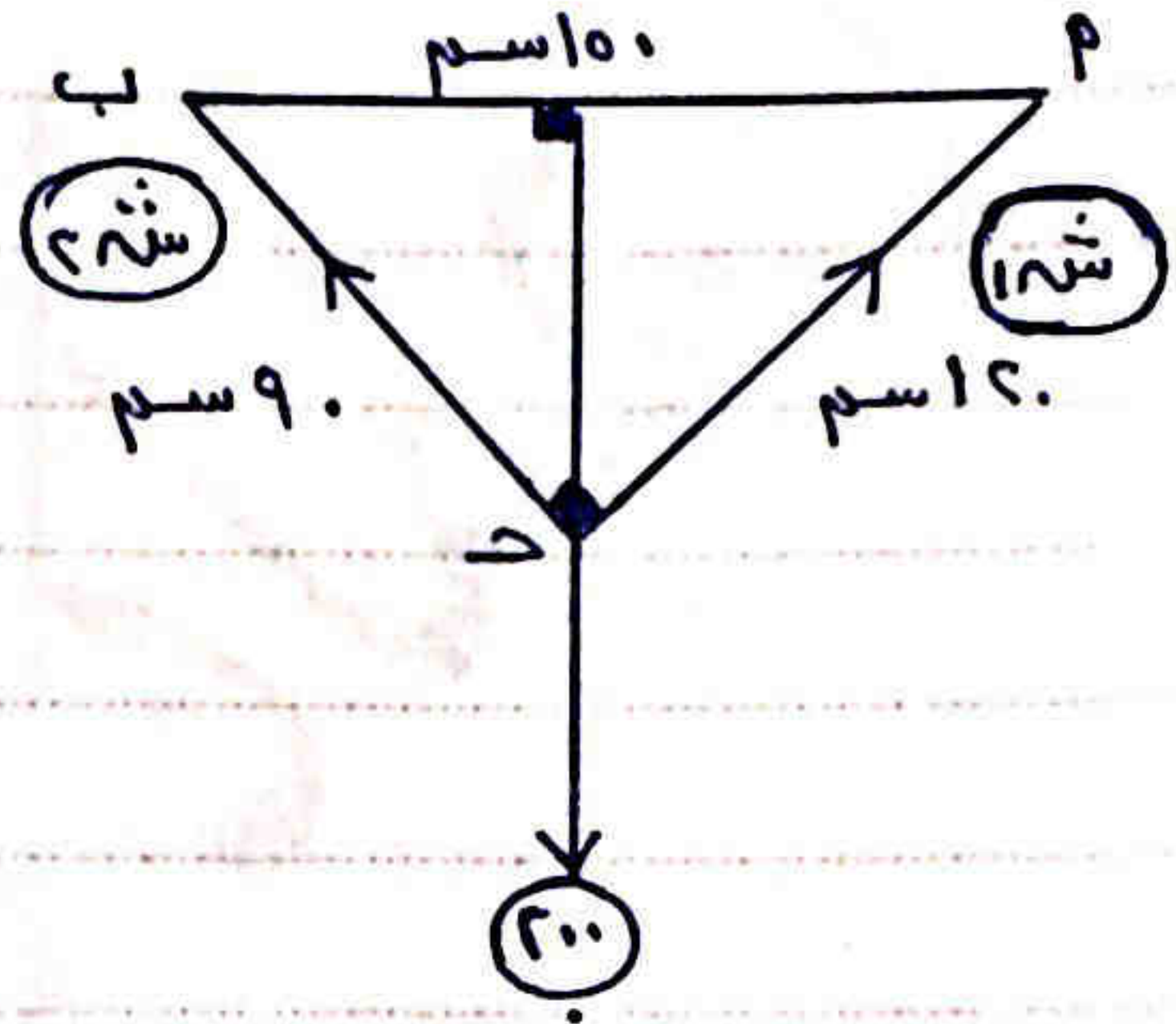
- لامي الحالة الخاصة

$$\frac{ق}{حا ٣٠} = \frac{ش}{حا ٦٠} = \frac{٨٠}{حا ٩٠}$$

بس كمل انت الباقي

Scanned with CamScanner

مثال: علقت ثقل ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٩٠سم ، ١٢٠سم من نقطتين على خط أفقي واحد البعد بينهما ١٥٠سم أوجد مقدار الشد في كلا الخيطين؟

الحل

- طيب ليه زاوية جـ قائمة لأنه $(مب)^2 = (مجـ)^2 + (ب حـ)^2$
- نطبق قاعدة مثلث القوى العمودي كل قوة خط عملها عمودي على ضلع من أضلاع المثلث.

شـ١ ⊥ ب جـ ، شـ٢ ⊥ م جـ ، ٢٠٠ ⊥ م ب

$$\therefore \frac{شـ_1}{90} = \frac{شـ_2}{120} = \frac{200}{150}$$

$$\leftarrow شـ_1 = \frac{90 \times 200}{150} = 120 \text{ ث.جم}$$

$$\leftarrow شـ_2 = \frac{120 \times 200}{150} = 160 \text{ ث.جم}$$

ممكن نحلها بقاعدة لامي.

مثال: وضع جسم وزنه ١٢ ث.كجم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى؟

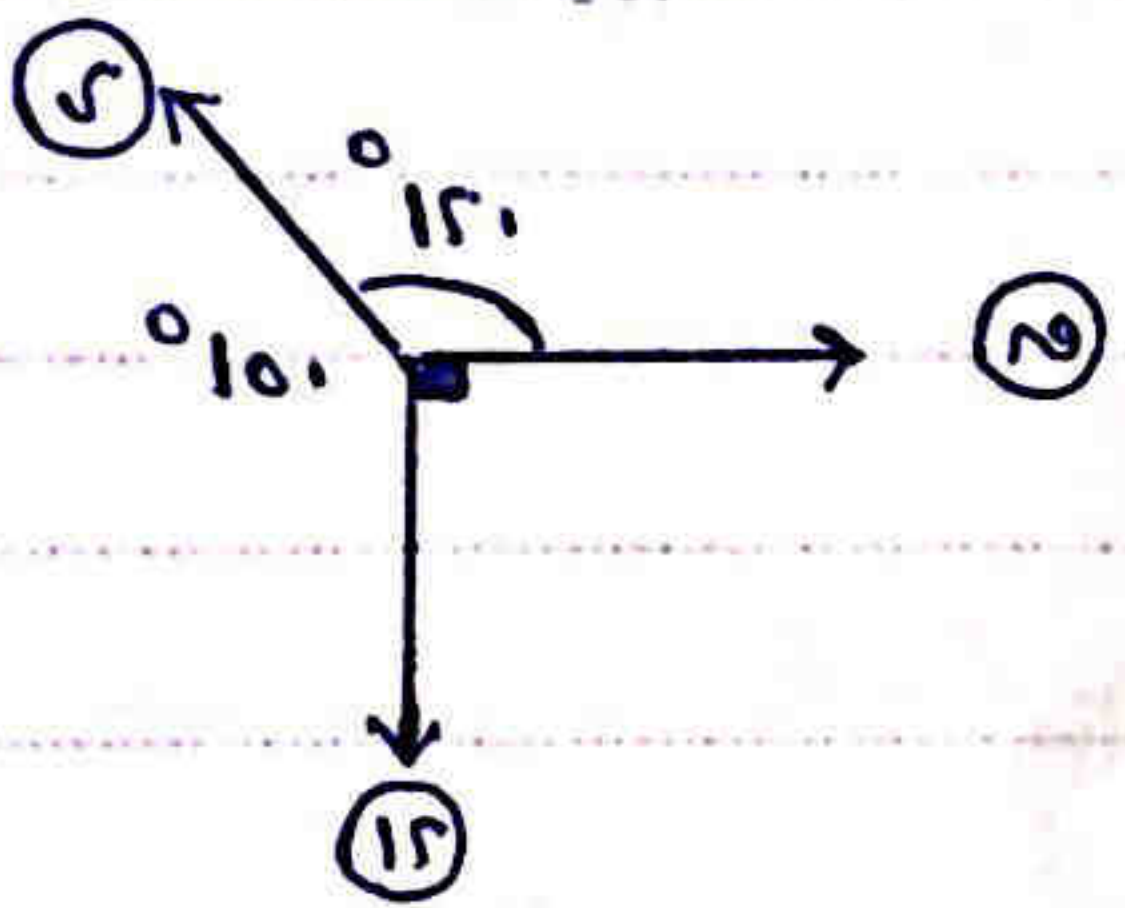
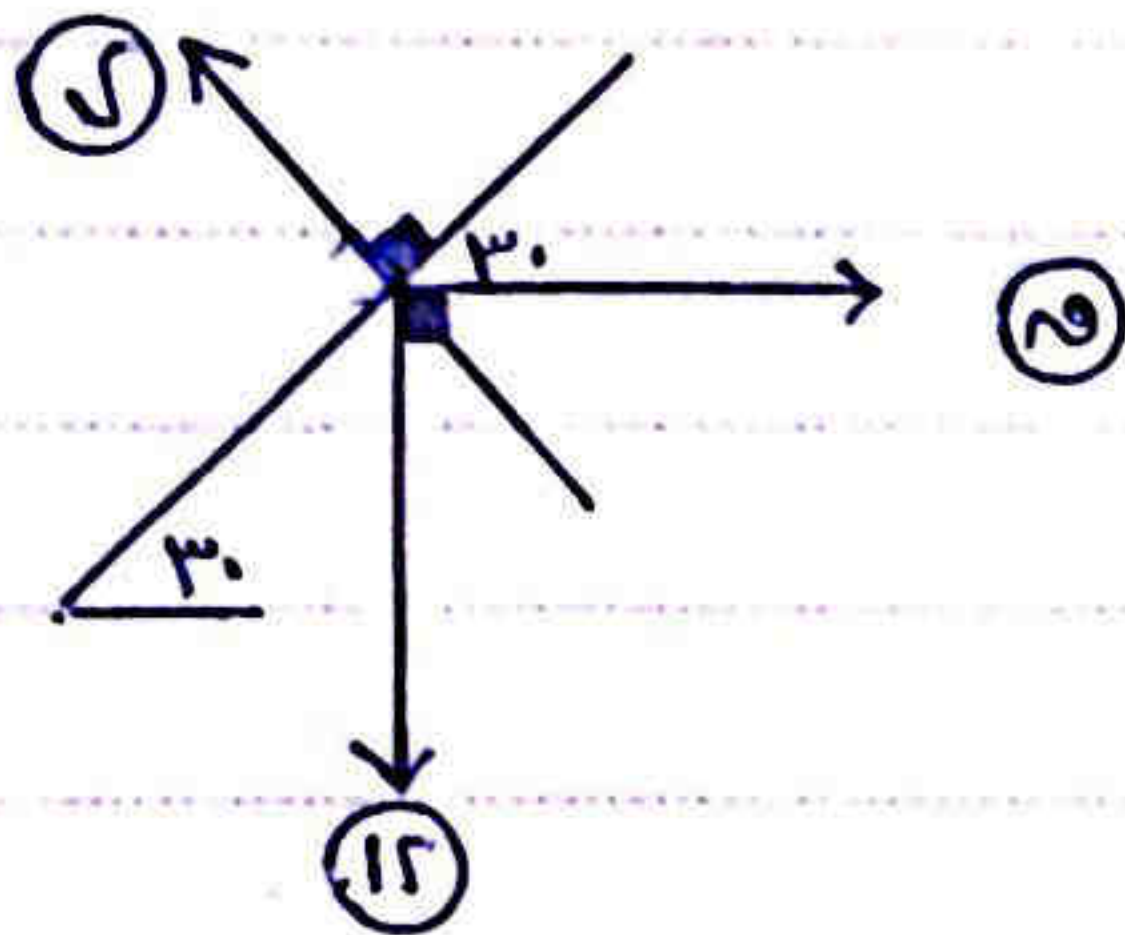
الحل

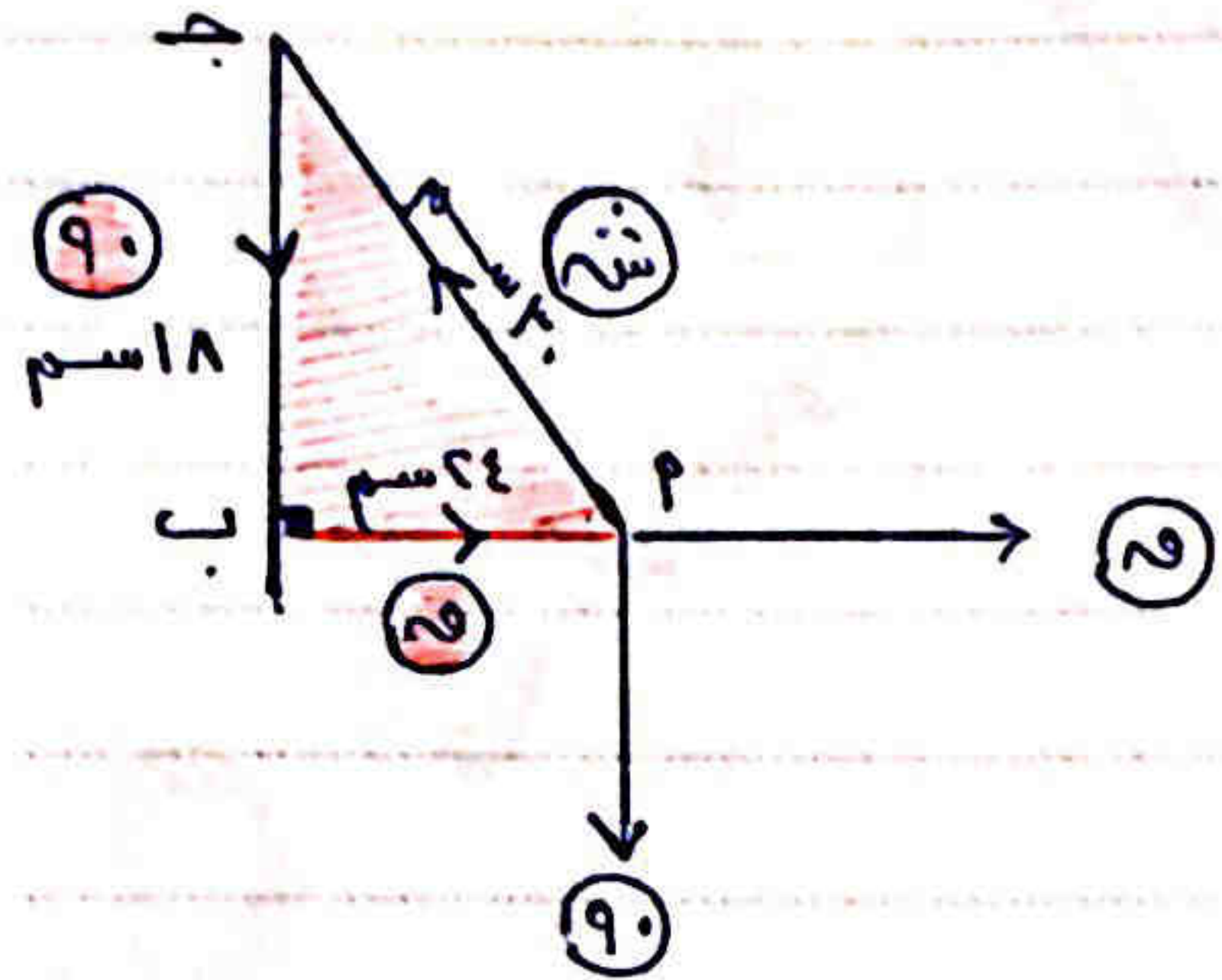
- لامي والله

$$\frac{ق}{\text{حا}150} = \frac{12}{\text{حا}120} = \frac{ر}{\text{حا}90}$$

$$\leftarrow ق = \frac{12\,\text{حا}150}{\text{حا}120} =$$

$$\leftarrow ر = \frac{12\,\text{حا}90}{\text{حا}120} =$$

Scanned with CamScanner

مثال: جسم وزنه ٩٠ ث جم معلق في نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٢٤ سم من الحائط أوجد مقدار القوة والشد في الخيط؟

الحل

$ب جـ = \sqrt{٣٠^٢ - ٢٤^٢} = ١٨$ سم

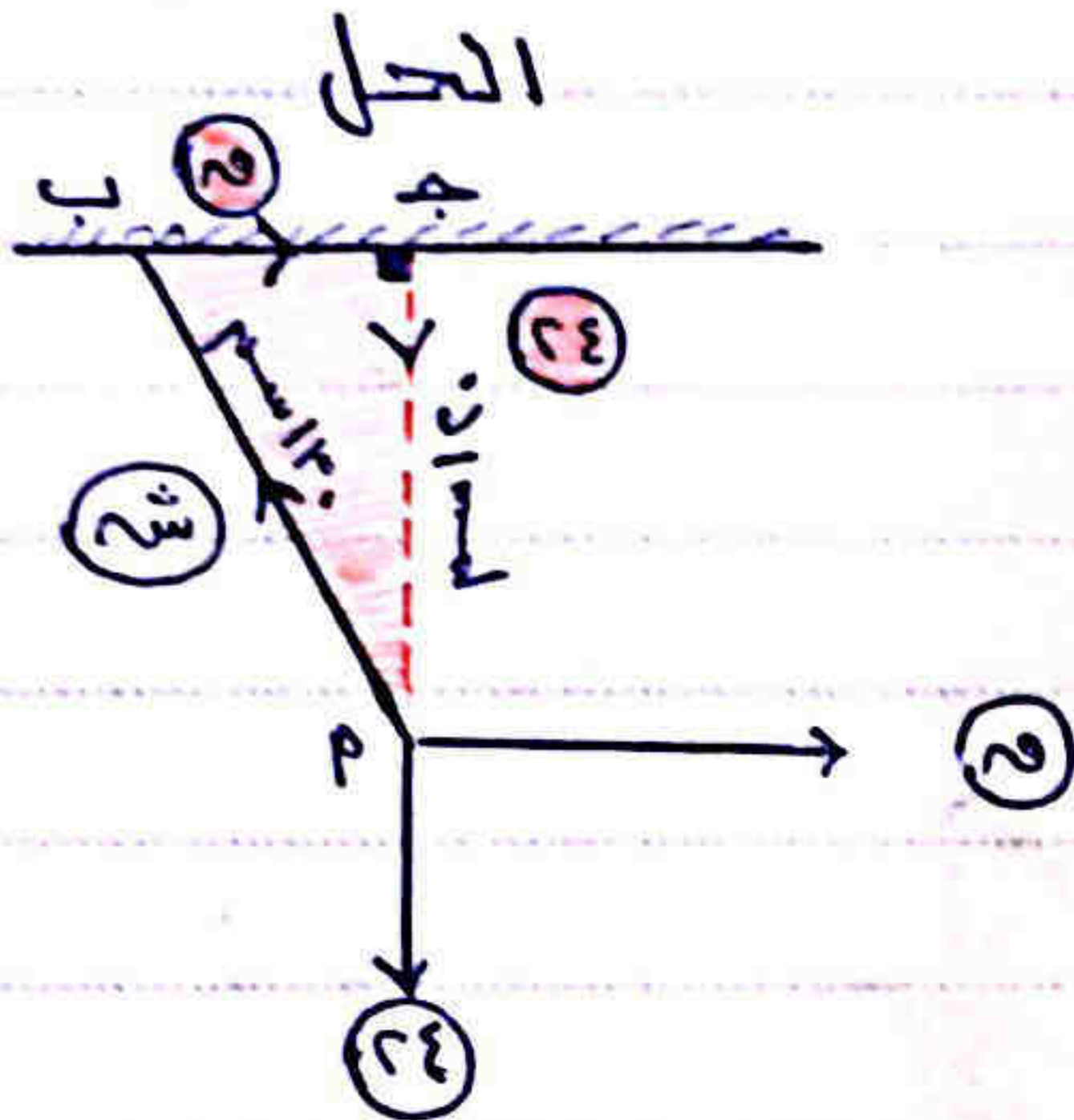
▪ قاعدة مثلث القوى

$\frac{٩٠}{١٨} = \frac{ش}{٣٠} = \frac{ق}{٢٤}$

$\leftarrow ش = \frac{٩٠ \times ٣٠}{١٨} = ١٥٠$ ث.جم

$\leftarrow ق = \frac{٩٠ \times ٢٤}{١٨} = ١٢٠$ ث.جم

مثال: جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق في أحد طرفي خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت في سقف الحجرة فإذا جذب الجسم بواسطة قوة أفقية ق فاتزن الجسم عندما كان أسفل الحائط الأفقي المار بنقطة التعليق مسافة ١٢٠ سم أوجد القوة ق والشد في الخيط؟

الحل

$ب جـ = \sqrt{١٣٠^٢ - ١٢٠^٢} = ٥٠$ سم

▪ قاعدة مثلث القوى

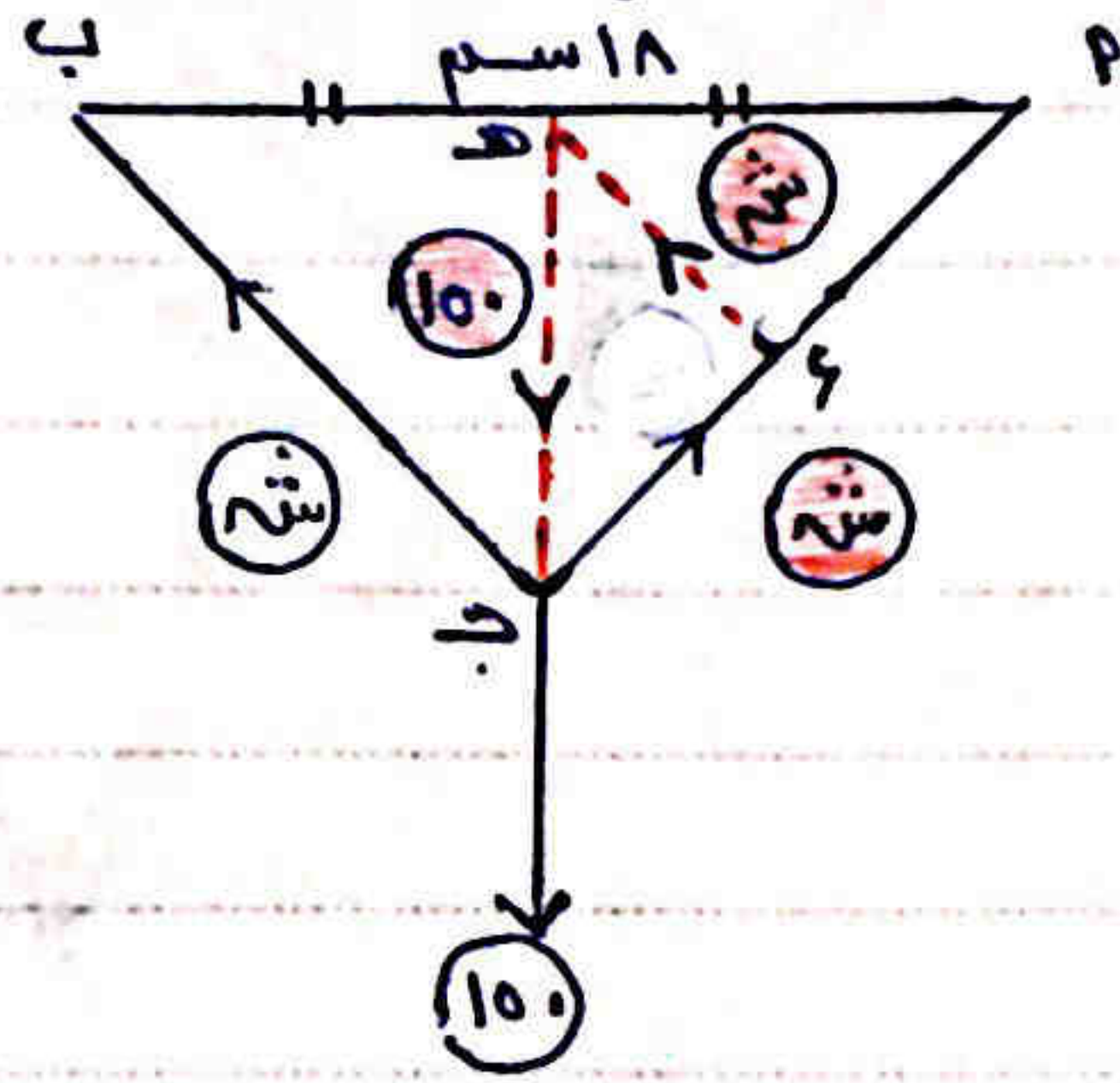
$\frac{ق}{٥٠} = \frac{٢٤}{١٢٠} = \frac{ش}{١٣٠}$

$\leftarrow ق = \frac{٥٠ \times ٢٤}{١٢٠} = ١٠$ نيوتن

$\leftarrow ش = \frac{٢٤ \times ١٣٠}{١٢٠} = ٢٦$ نيوتن

Scanned with CamScanner

مثال: خيط أملس طوله ٣٠ سم ، ربط في نقطتين أ ، ب بحيث كان أب أفقياً وطوله ١٨ سم فإذا انزلقت حلقة ملساء وزنها ١٥٠ ث جم على الخيط اثبت انه في وضع الاتزان يكون طولا فرعي الخيط متساويين ثم أوجد الشد في كل منهما ؟

الحل

▪ هو قال البكرة ملساء ∴ الشد في فرعي الخيط متساويات

∴ أ ج = ب ج = $\frac{٣٠}{٢}$ = ١٥ سم

∴ ٢ هـ = $\frac{١}{٢}$ ب ج = ٧,٥ سم

٢ ج = $\frac{١}{٢}$ أ ج = ٧,٥ سم

△ أ هـ ج ← هـ ج = $\sqrt{١٥^٢ - ٩^٢}$ = ١٢ سم

△ ٢ هـ ج مثلث القوى

∴ $\frac{ش}{٧,٥} = \frac{ش}{٧,٥} = \frac{١٥٠}{١٢}$

∴ ش = $\frac{١٥٠ \times ٧,٥}{١٢}$ = ٩٣,٧٥ ث جم

مثال: علق ثقل مقداره ٩٠ ث جم في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها ٦٠° أوجد في وضع الاتزان مقدار القوة وكذلك الشد في الخيط ؟

الحل

حلها انت لأن المثال دا يعتبر مكرر أ قسم بالله خلاص ارتحتم لما حلفتونى .

Scanned with CamScanner

(مثال) علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسي بزاوية قياسها (هـ) ويمر على بكرة صغيرة ملساء ويحمل في نهايته الأخرى وزناً مقداره ١٢ نيوتن ويميل الثاني على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° ويمر على بكرة ملساء ويحمل في نهايته الأخرى وزناً مقداره ٨ نيوتن أوجد قيمة (هـ) ومقدار الوزن؟

الحل

ش٢ = ٨ ، ش١ = ١٢

▪ بتطبيق قاعدة لامي :

$$\frac{ش_2}{حا(١٨٠-هـ)} = \frac{ش_1}{حا١٥٠} = \frac{و}{حا(٣٠+هـ)}$$

$$\frac{٨}{حاهـ} = \frac{١٢}{حا١٥٠} = \frac{و}{حا(٣٠+هـ)}$$

$$حاهـ = \frac{٨ \times حا١٥٠}{١٢}$$

∴ هـ = ١٩° ٢٨ َ ١٦ ً

▪ $$و = \frac{١٢ \times حا(٣٠ + ١٦ ً ٢٨ َ ١٩°)}{حا١٥٠}$$

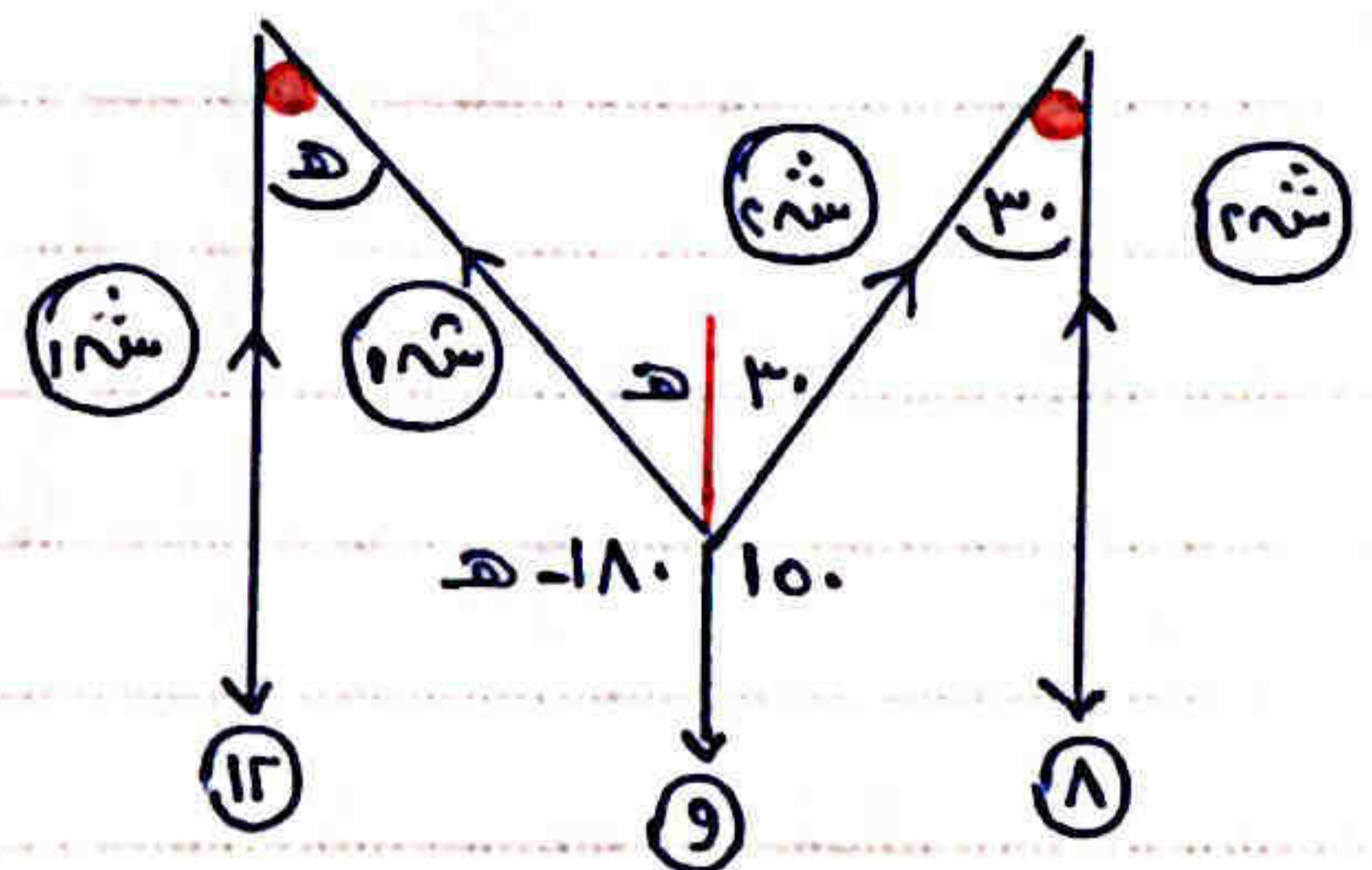
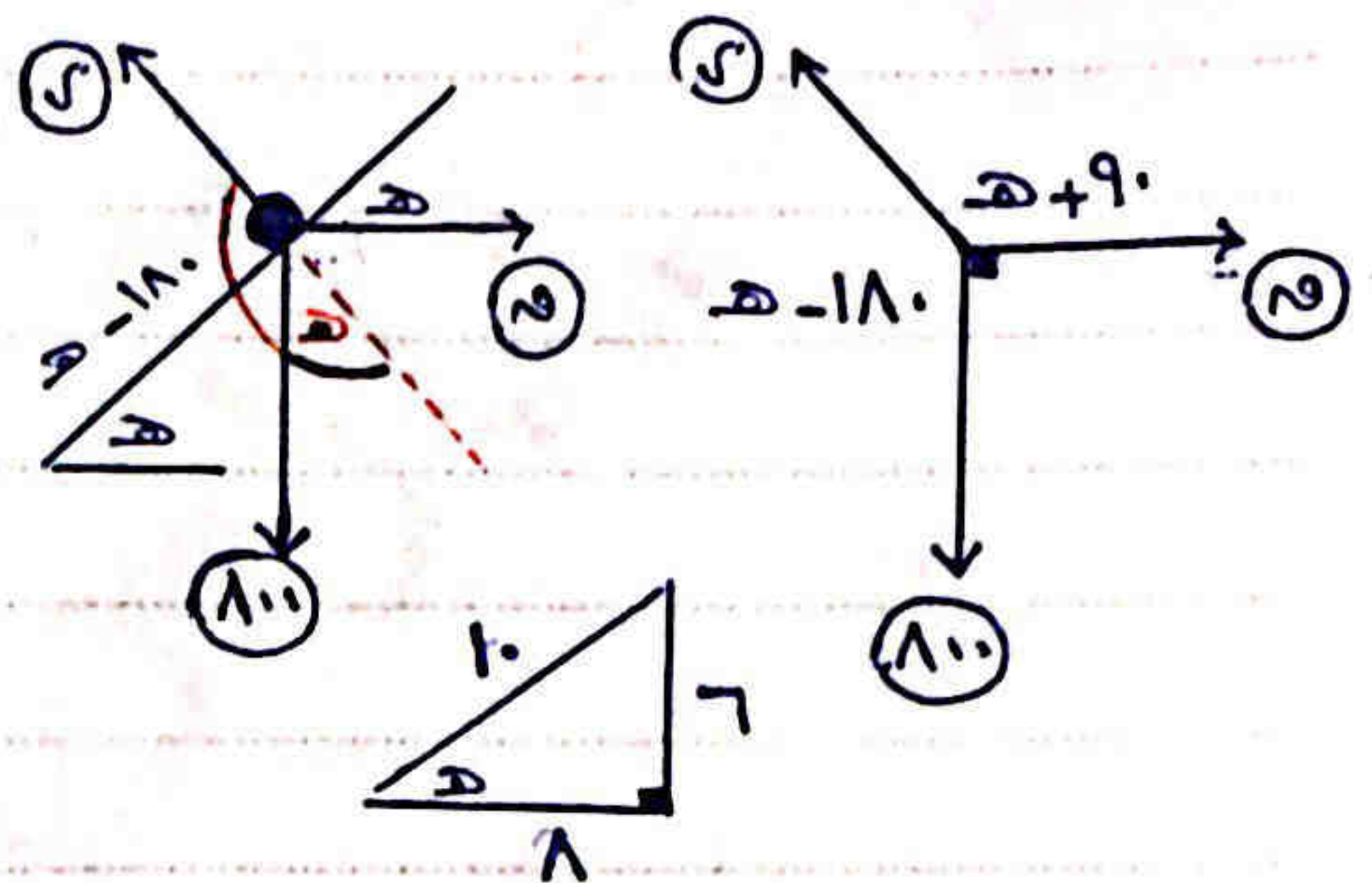
∴ و = ٢٤,١٨ نيوتن #

حل آخر :

تطبيق قاعدة لامي الخاصة

$$\frac{ش_2}{حاهـ} = \frac{ش_1}{حا٣٠} = \frac{و}{حا(٣٠+هـ)}$$

$$\frac{٨}{حاهـ} = \frac{١٢}{\frac{١}{٢}} = \frac{و}{حا(٣٠+هـ)}$$

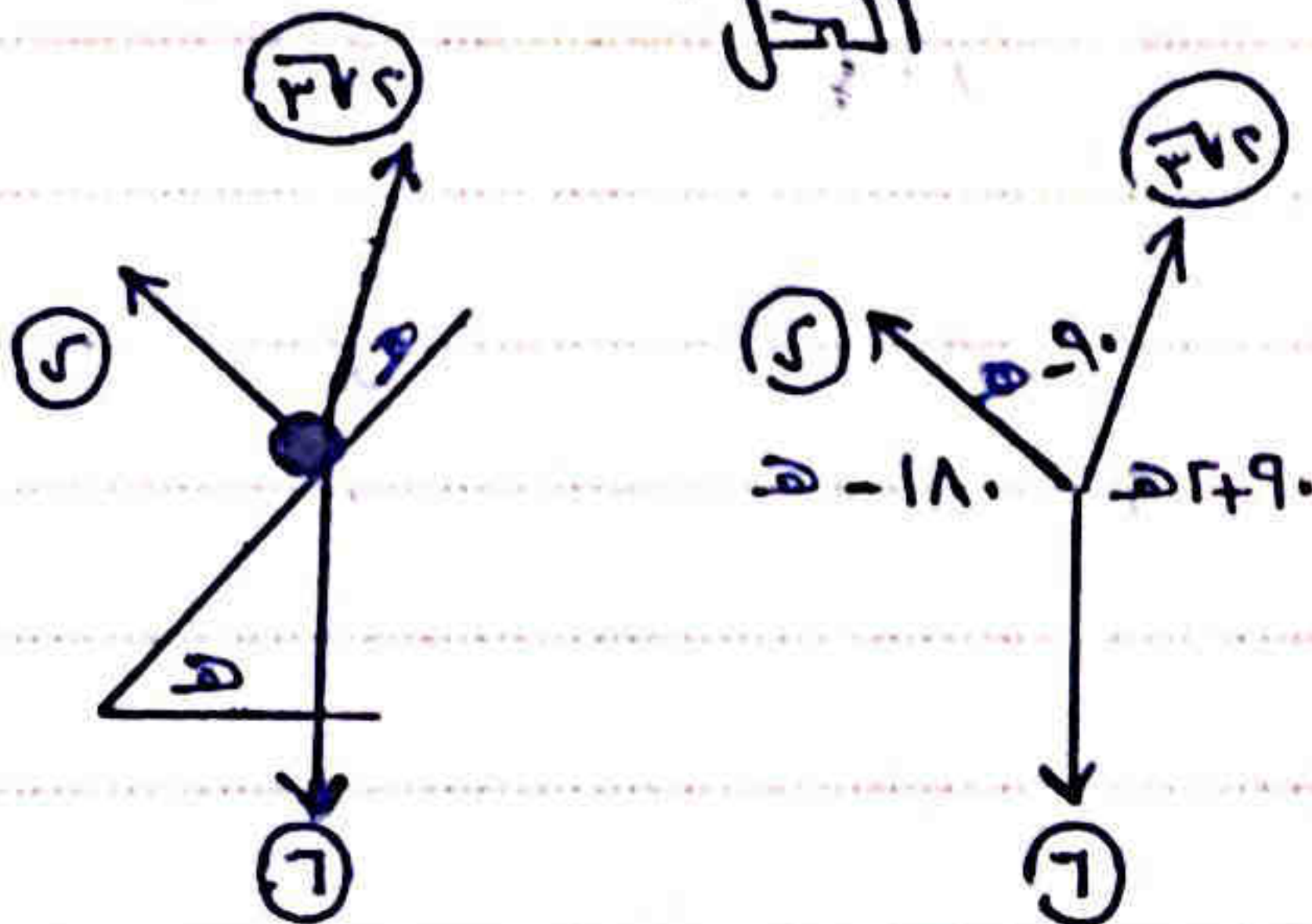
كمل انت الحل يا عسل

مثال وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث جاهـ = ٠٫٦ وحفظ الجسم في حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

الحل

م / حا(١٨٠-هـ) = ٨٠٠ / حا(٩٠+هـ) = ر / حا٩٠

م / جاهـ = ٨٠٠ / جتاهـ = ر / ١

- م = (٨٠٠ × جاهـ) / جتاهـ = ٦٠٠ ث جم

- ر = (٨٠٠ × ١) / جتاهـ = ١٠٠٠ ث جم

مثال وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢√٣ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية هـ. لأعلى أوجد قيمة هـ ورد الفعل للمستوى؟

الحل

- ٢√٣ / حا(١٨٠-هـ) = ر / حا(٩٠+٢هـ) = ٦ / حا(٩٠-هـ)

٢√٣ / جاهـ = ر / جتا٢هـ = ٦ / جتاهـ

٢√٣ / جاهـ = ٦ / جتاهـ

جاهـ / جتاهـ = ٢√٣ / ٦ ⇐ ظاهـ = √٣ / ٣

← ∴ هـ = ٣٠° #

← ر = (٦ × جتا٦٠) / جتا٣٠ = ٢√٣ نيوتن #

Scanned with CamScanner

مثال وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° وحفظ من الانزلاق بتأثير قوة مقدارها ق نيوتن ويميل اتجاهها على المستوى بزاوية قياسها ٣٠° الى أعلى أوجد ق ورد الفعل ؟

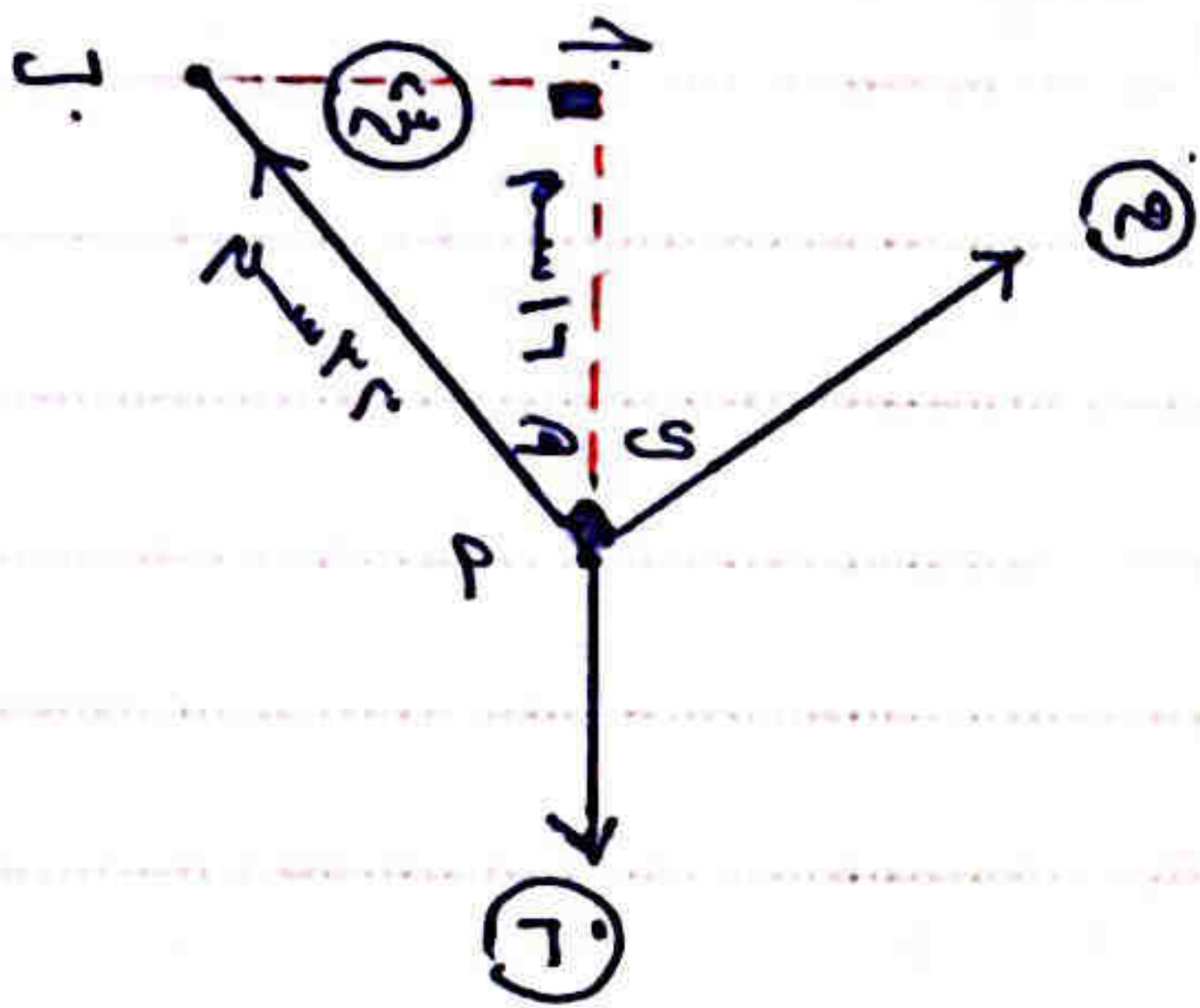
الحل

■ $\frac{ق}{حا ١٥٠} = \frac{ر}{حا ١٥٠} = \frac{١٢}{حا ٦٠}$

← ق = $\frac{١٢ \times حا ١٥٠}{حا ٦٠}$ = $٤\sqrt{٣}$ نيوتن

← ر = $\frac{١٢ \times حا ١٥٠}{حا ٦٠}$ = $٤\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال جسم وزنه ٦٠ ث.جم معلق من أحد طرفي خيط خفيف (م) مثبت طرفه الآخر (ب) في نقطة ثابتة حيث م ب = ٣٢ سم فاذا اتزن الجسم وهو على بعد ١٦ سم أسفل الخط الأفقي المار بنقطة (ب) بقوة عمودية على الخيط . أوجد مقدار القوة والشد في الخيط ؟

الحل

∵ طول الضلع المقابل للزاوية ب = $\frac{1}{2}$ طول الوتر وذلك في △ م ب جـ ∴ ق (ب) = ٣٠°

∴ ق (هـ) = ١٨٠ - (٣٠ + ٩٠) = ٦٠°

∴ ق (ى) = ٩٠ - ٦٠ = ٣٠°

من قاعدة لامي الخاصة

$\frac{ق}{حا هـ} = \frac{ش}{حا ى} = \frac{٦٠}{حا (ى + هـ)}$

$\frac{ق}{حا ٦٠} = \frac{ش}{حا ٣٠} = \frac{٦٠}{حا ٩٠}$

■ ق = ... ، ش = ...

Scanned with CamScanner

مثال جسم وزنه ٦ ث.كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية ٣٠° وحفظ بقوة شد شـ = ٢√٣ ث كجم أوجد قياس الزاوية التي تصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد الفعل للمستوى على الجسم؟

الحل

▪ لامي يا لامي يا روح قلبي

$$\frac{٢\sqrt{٣}}{\text{حا}١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{حا}(١٢٠+\text{هـ})} = \frac{٦}{\text{حا}(٩٠-\text{هـ})}$$

$$\frac{٢\sqrt{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ر}}{\text{حا}(١٢٠+\text{هـ})} = \frac{٦}{\text{جتاهـ}}$$

← $\text{جتاهـ} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{٢\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٣٠° #

← $\text{ر} = \frac{٢\sqrt{٣} \times \text{حا}(١٢٠+٣٠)}{\frac{١}{٢}}$

= ٢√٣ ث.كجم #

مثال علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية هـ ويميل الآخر على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان مقدار الشد في الخيط الأول = ١٠٠ ث جم فأوجد هـ وكذلك مقدار الشد في الخيط الثاني؟

الحل

$$\frac{١٠٠}{\text{حا}١٥٠} = \frac{\text{شـ}}{\text{حا}(١٨٠-\text{هـ})} = \frac{٢٠٠}{\text{حا}(٣٠+\text{هـ})}$$

$$\frac{١٠٠}{\text{حا}١٥٠} = \frac{\text{شـ}}{\text{حاهـ}} = \frac{٢٠٠}{\text{حا}(٣٠+\text{هـ})}$$

▪ $\text{حا}(٣٠+\text{هـ}) = \frac{٢٠٠ \times \text{حا}١٥٠}{١٠٠} = ١$

٣٠ + هـ = ٩٠

∴ هـ = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠° #

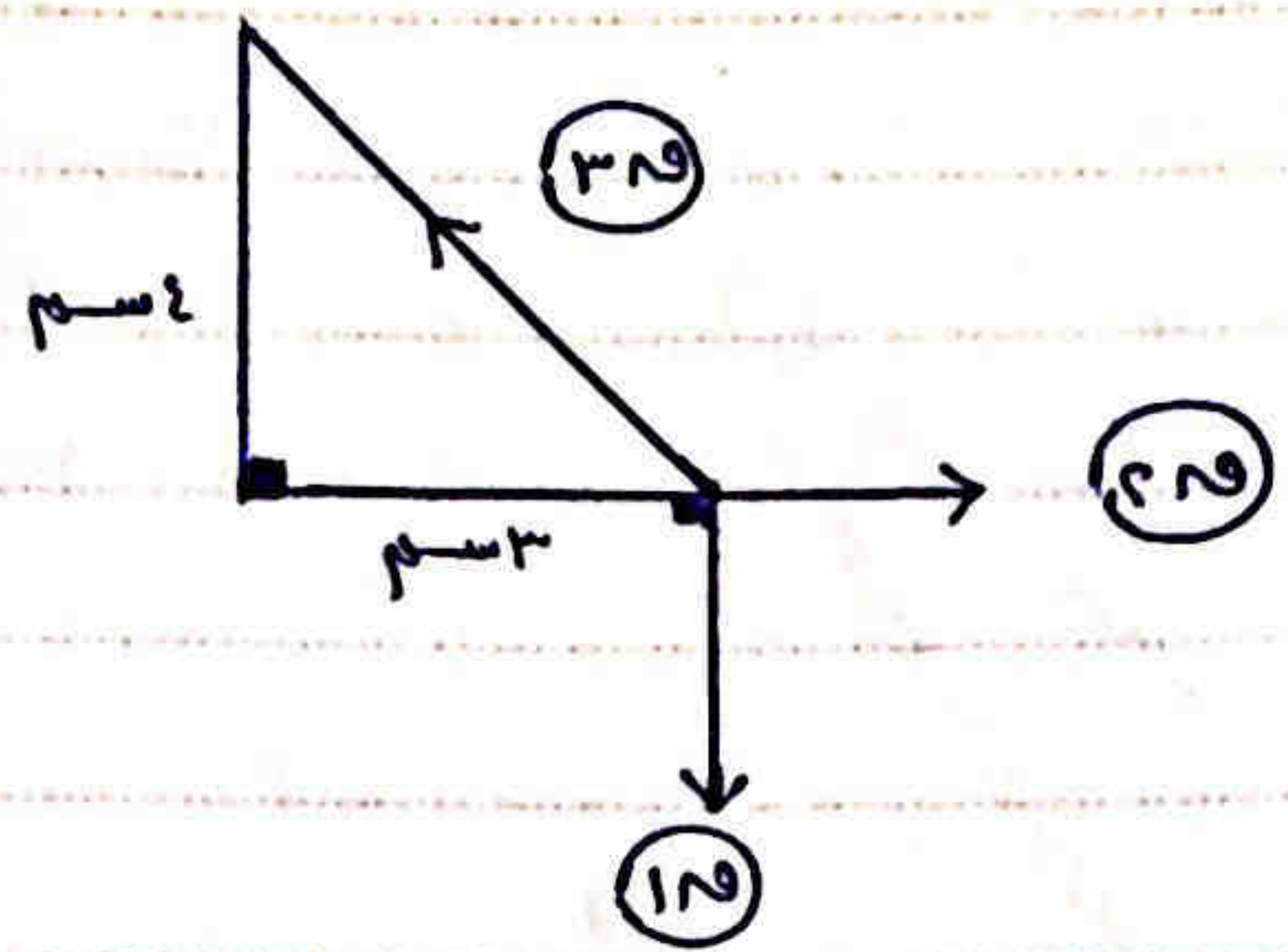
▪ $\text{شـ} = \frac{١٠٠ \times \text{حا}٦٠}{\text{حا}١٥٠} = ١٠٠\sqrt{٣}$ ث.كجم

Scanned with CamScanner

مثال: من الشكل المقابل

■ ق١ : ق٢ : ق٣ = ...

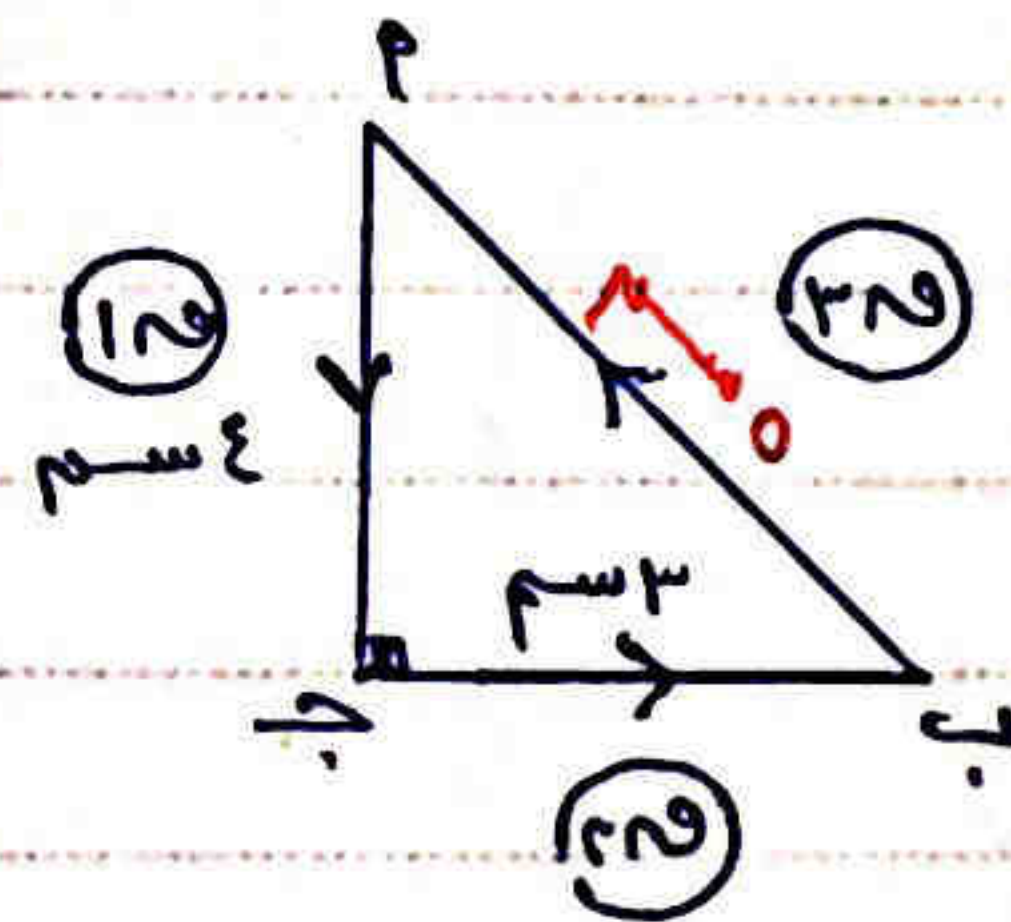
(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(ج) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

الحل

قاعدة مثلث القوى

أب = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥سم

$\frac{ق١}{٤} = \frac{ق٢}{٣} = \frac{ق٣}{٥}$

∴ ق١ : ق٢ : ق٣ = ٤ : ٣ : ٥ #

مثال: ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين ق١ ، قوس٢ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠°

(ج) ١٢٠° (د) ١٥٠°

الحل

■ ٣٦٠ ÷ ٣ = ١٢٠°

هناك حل آخر طويل شوية

ق١ = ق ، ق٢ = ق ، ق٣ = ق

ح = ق٣ = ق (لأن المجموعة متزنة)

ح٢ = ق١٢ + ق٢٢ + ٢ق١ ق٢ جتاى

ق٢ = ق٢ + ق٢ + ٢ ق × ق × جتاى

ق٢ = ٢ق٢ + ٢ق٢ جتاى

٢جتاى + ٢ = ١ ← جتاى = $-\frac{١}{٢}$

∴ ى = ٦٠° (سالبة في الربع الثاني)

∴ ٥ (بين ق١ ، قوس٢) = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠°

Scanned with CamScanner

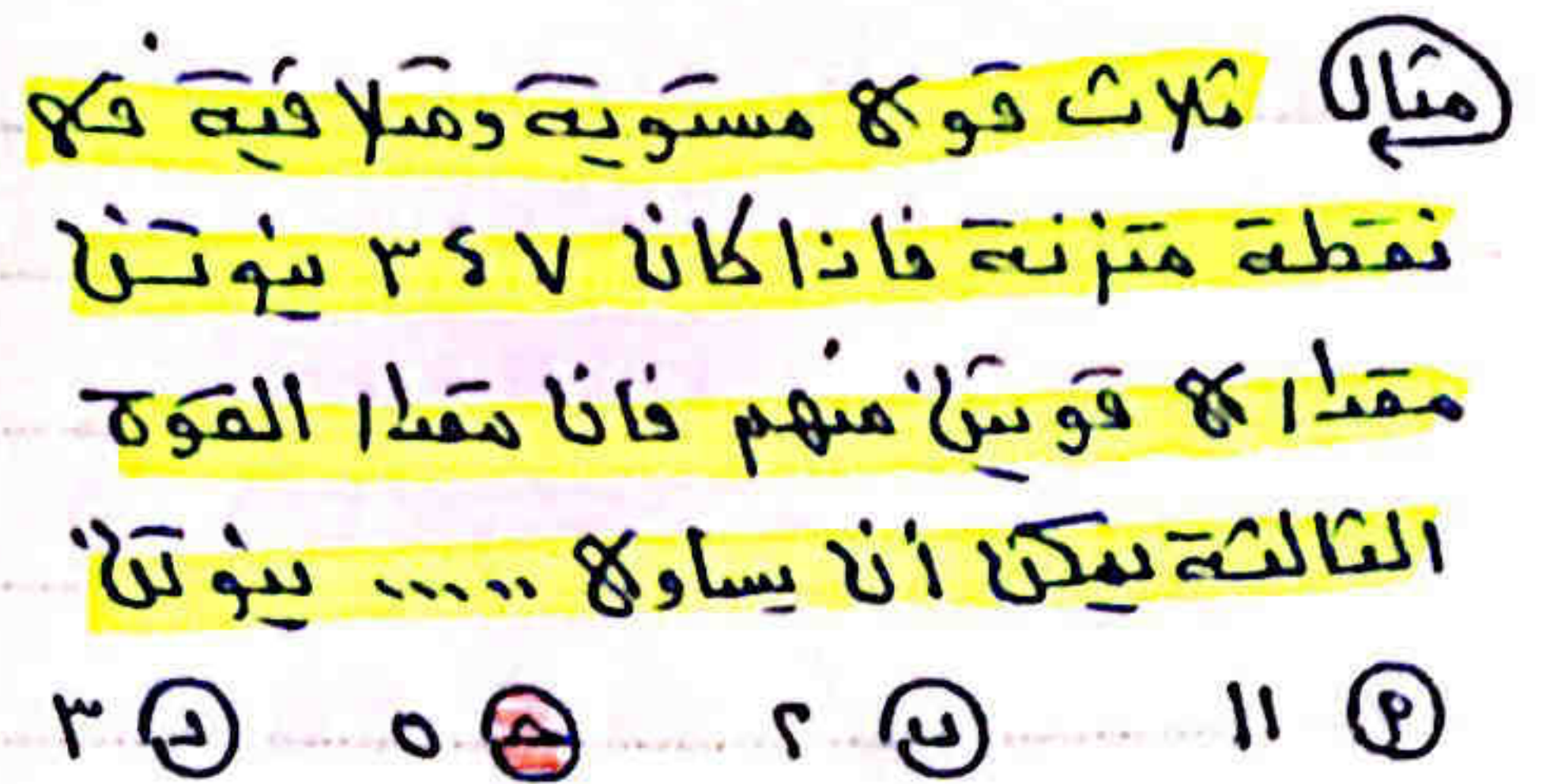
مثال: ثلاث قوى مستوية وملاقية في نقطة متزنة فاذا كان ٣ ، ٧ نيوتن مقدارا قوتين منهم فان مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوي ...... نيوتن

أ) ١١ ب) ٢ ج) ٥ د) ٣

الحل

ق٣ ∈] ٧ - ٣ ، ٧ + ٣ [

∈] ٤ ، ١٠ [

سوف نعم الفترة ماعدا ٤ ، ١٠

واختار من بينهم هتلاقي العدد

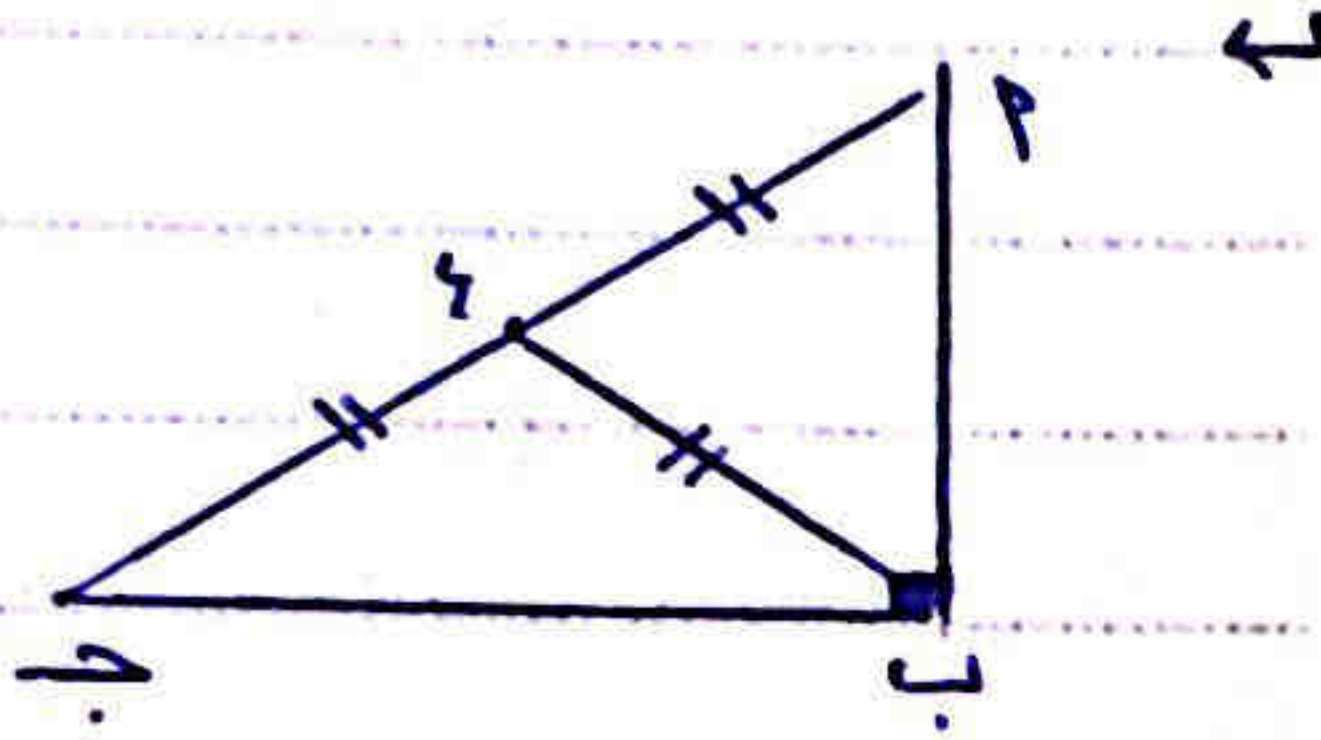
٥ هو الصحيح في الاختيارات

مثال: حلقة صغيرة ملساء مقدار وزنها ٤٠٠ ث.جم تنزلق على خيط خفيف طوله ٤٠ سم حيث طرفاه في نقطتان أ ب على خط أفقي واحد البعد بينهما ٢٠ سم ، أثرت على الحلقة قوة أفقية حتى أصبحت الحلقة في حالة التوازن واقعة أسفل النقطة ب فان مقدار الشد في الخيط يساوي .... ث.جم

أ) ٢٠٠ ب) ٢٥٠ ج) ٤٠٠ د) ٤٥٠

الحل

الاجابة الصحيحة ب) ٢٥٠ ث.جم

للتوضيح انظر الجهة المقابلة يا غالي

نفرض بجـ = س ∴ أجـ = ٤٠ - س

ومعانا أب = ٢٠ سم

من فيثاغورث :

$(٤٠ - س)^2 = س^2 + (٢٠)^2$

$١٦٠٠ - ٨٠ س + س^2 = س^2 + ٤٠٠$

∴ ٨٠ س = ١٢٠٠ ⇐ س = ١٥

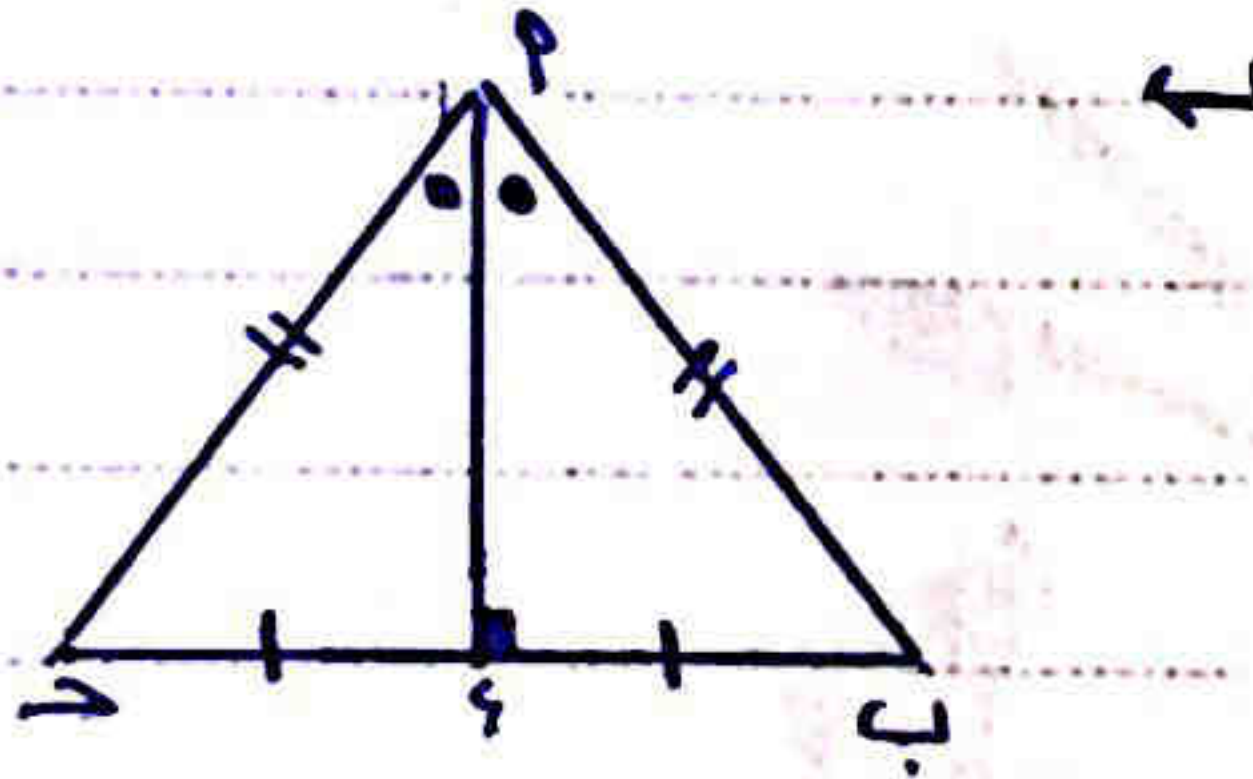
▪ بتطبيق قاعدة مثلث القوى

$\frac{٤٠٠ - ش}{ب جـ} = \frac{ش}{أ جـ} = \frac{ق}{أ ب}$

$\frac{٤٠٠ - ش}{١٥} = \frac{ش}{٢٥} = \frac{ق}{٢٠}$

∴ $\frac{٤٠٠ - ش}{٣} = \frac{ش}{٥}$

بالتبسيط يا معلم ∴ ش = ٢٥٠ ث.جم

Scanned with CamScanner

قاعدة (٤) :

تلاقي خطوط عمل ثلاث قوى متزنة :

- اذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فان خطوط عمل القوى الثلاث تتلاقى في نقطة واحدة .

بالبلدي كدا :

علشان تتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى لازم ولا بد أن تتلاقى خطوط عملهم في نقطة واحدة .

- اذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية بحيث التقى خطا عمل اثنين منها في نقطة فان خط عمل القوة الثالثة لا بد وأن يمر بهذه النقطة .

- ملاحظات هامة :

← مسائل السلم أو القضيب اذا كانا :

- منتظم : اذاً الوزن يؤثر في المنتصف

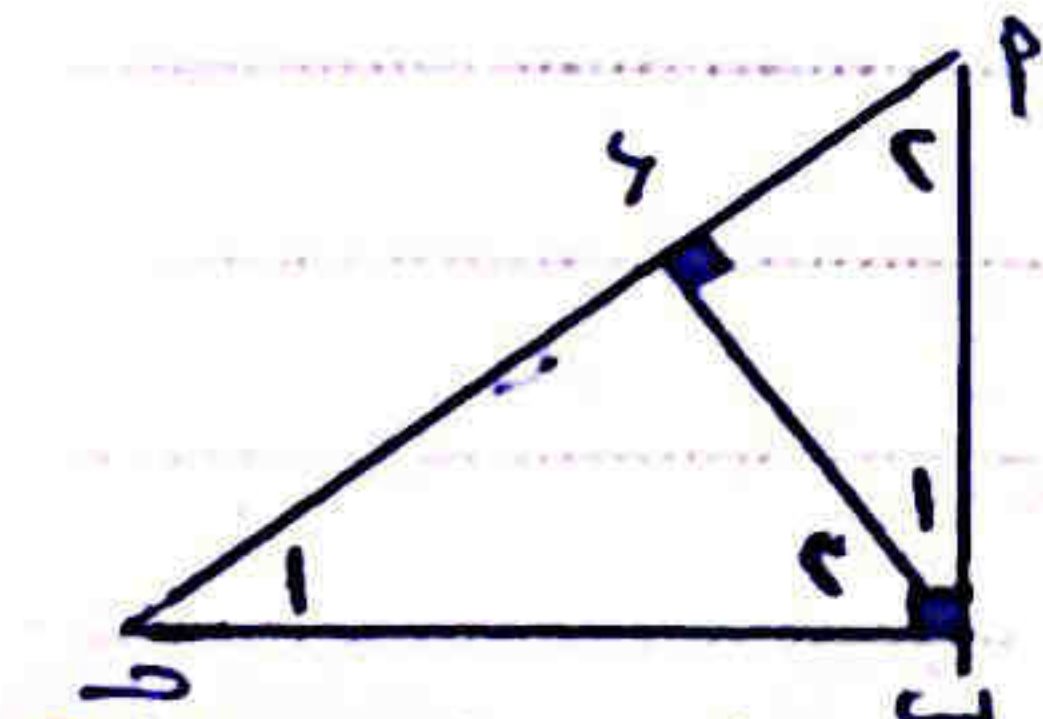
- غير منتظم : اذاً مكان الوزن غير محدد

← لكل قوة خط عمل مش هقول تاني

- ركز في الحاجات دي أوي وادعيلي :

$ب ء = \frac{1}{2}$ أ جـ [متوسط خارج من رأس القائمة يساوي نصف طول الوتر]

- أ ب = أ جـ
- أ ء ⊥ ب جـ
- ء منتصف ب جـ
- أ ء ينصف $\hat{أ}$

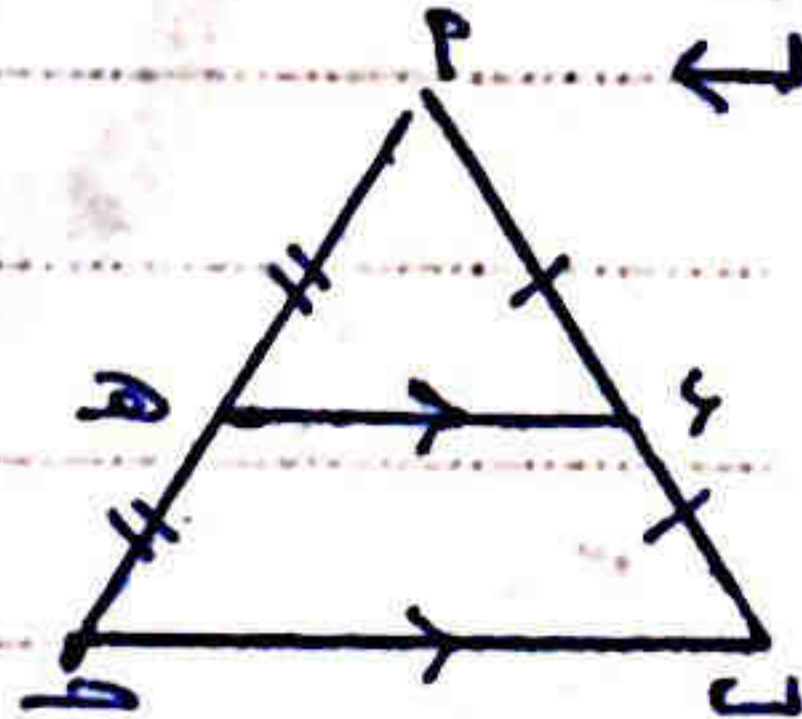
$ء هـ = \frac{1}{2}$ ب جـ

قاعدة المثلث القائم خارج منها عمود (نظرية اقليدس)

← $(ب ء)^2 =$ أ ء × ء جـ

← $ب ء = \frac{ب جـ \times أ ب}{أ جـ}$

← $(أ ب)^2 =$ أ ء × أ جـ

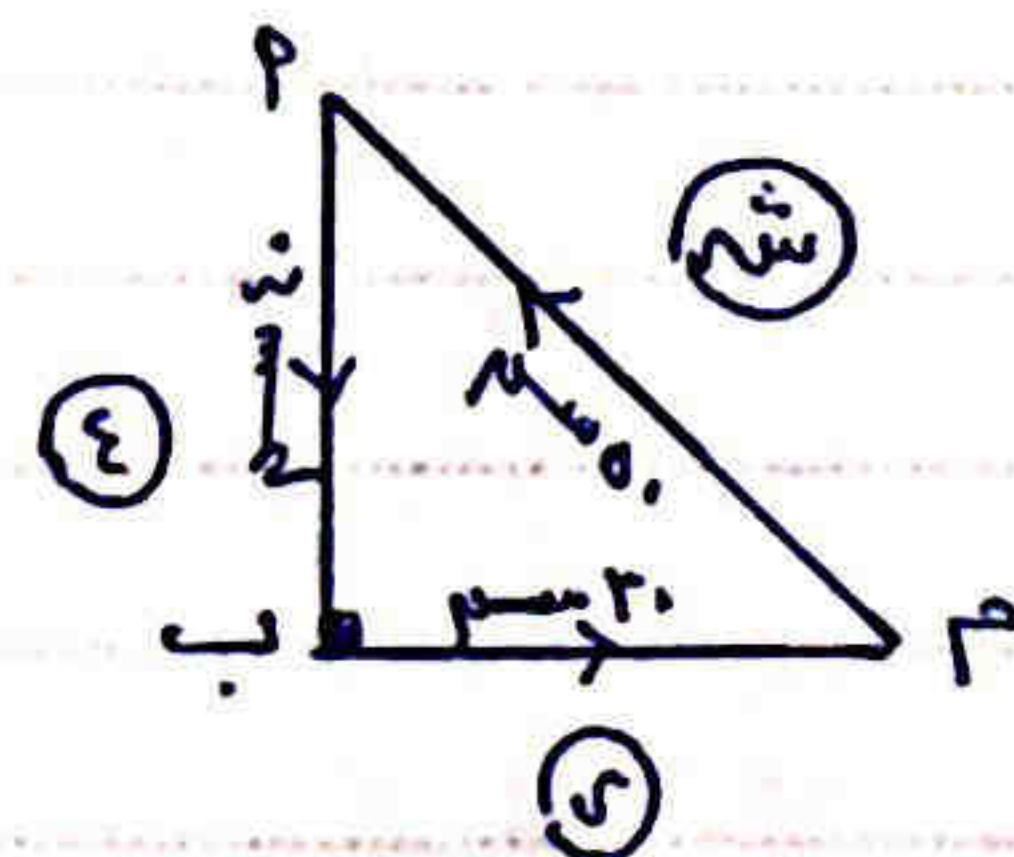
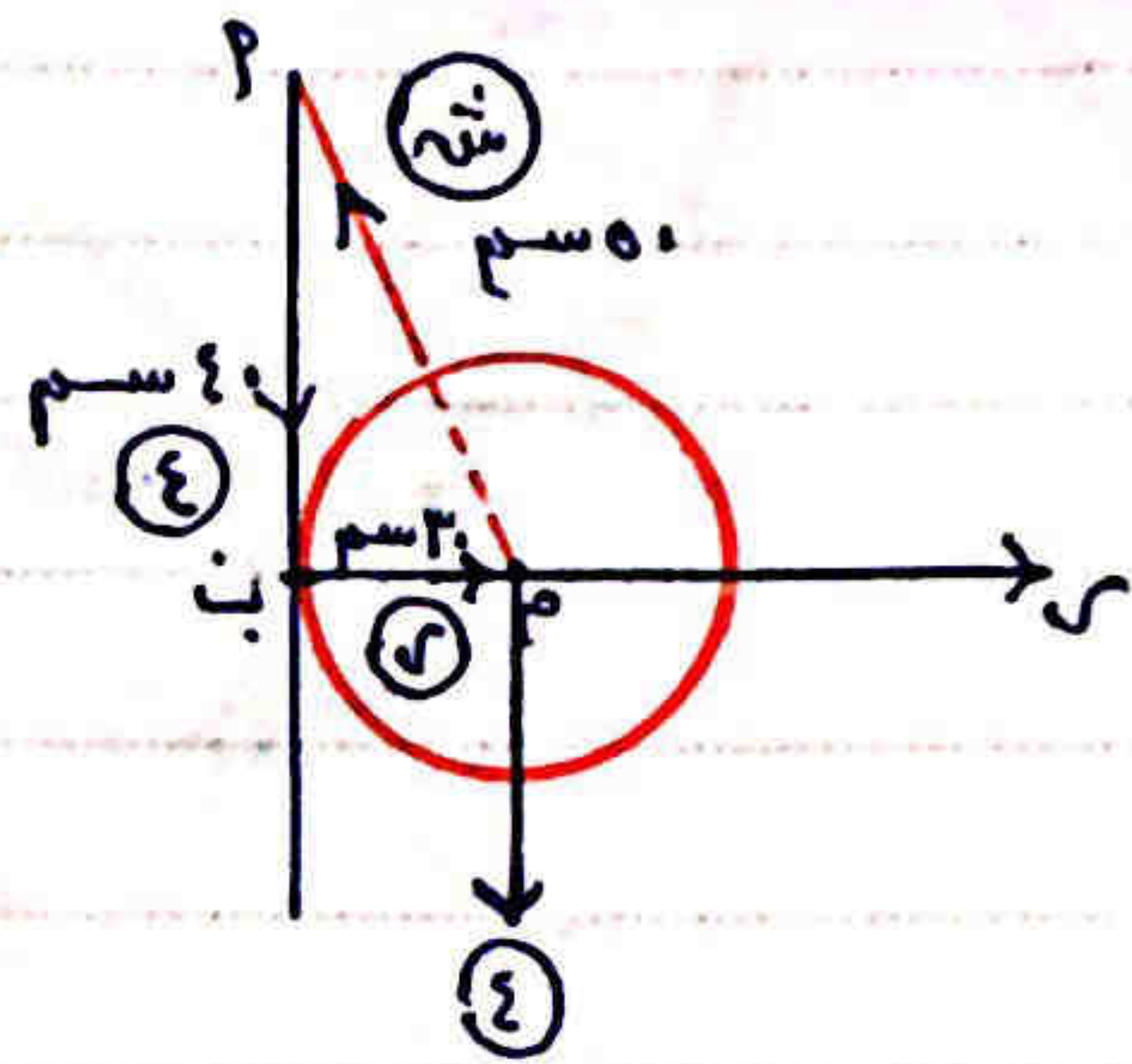
← $(ب جـ)^2 =$ جـ ء × جـ أ

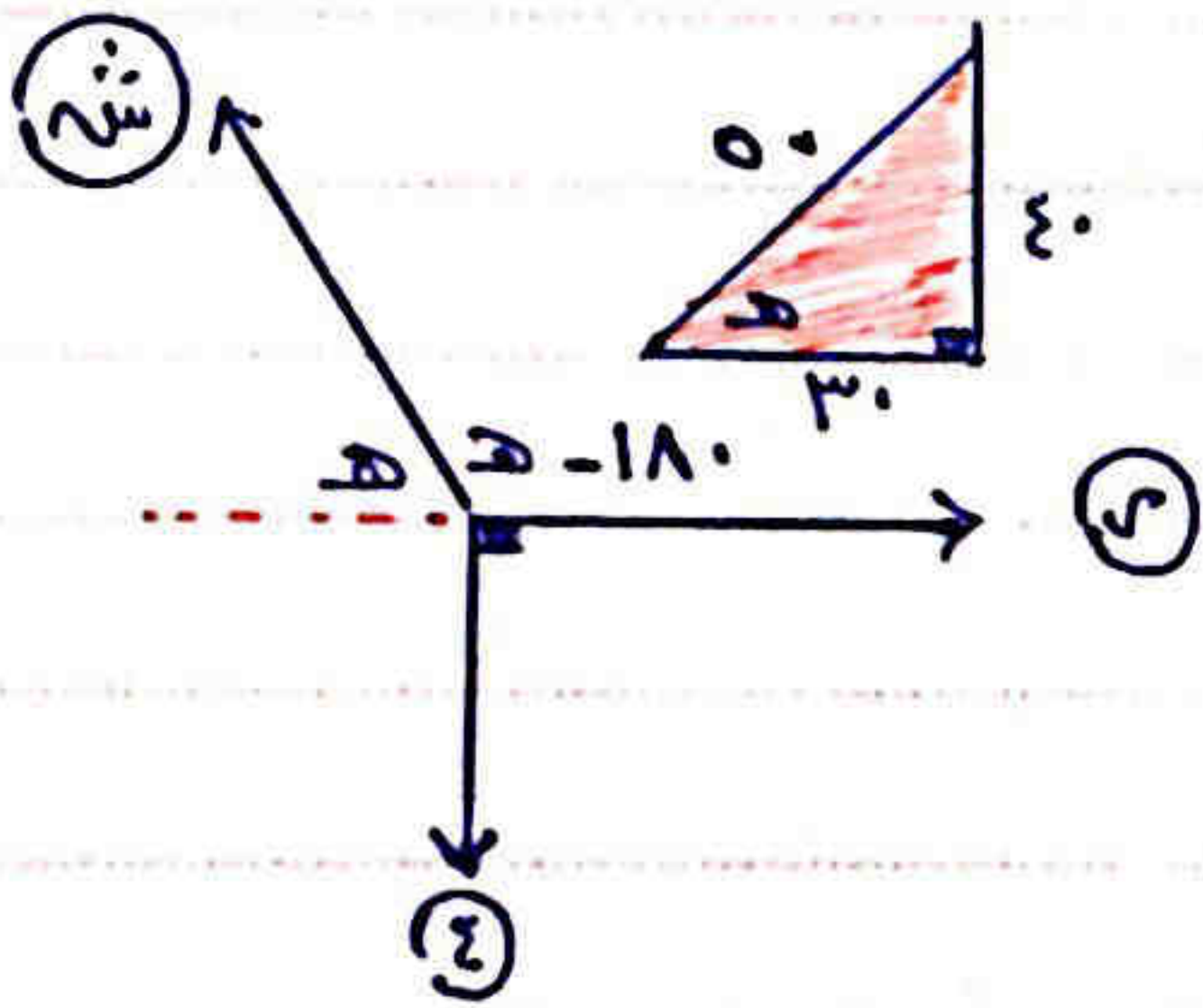
Scanned with CamScanner

مثال: كرة ملساء وزنها ٤ ث كجم وطول نصف قطرها ٣٠ سم علقت من نقطة على سطحها بخيط طوله ٢٠ سم وثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسي أملس أوجد كل من الشد في الخيط ورد فعل الحائط على الكرة ؟

الحل

مثلث القوى م ب م

$$\frac{ر}{٣٠} = \frac{شَ}{٥٠} = \frac{٤}{٤٠}$$

▪ $ر = \frac{٤ \times ٣٠}{٤٠} = ٣$ ث كجم

▪ $شَ = \frac{٤ \times ٥٠}{٤٠} = ٥$ ث كجم

حل آخر باستخدام قاعدة لامي

$$\frac{ر}{جا(٩٠ + هـ)} = \frac{شَ}{جا ٩٠} = \frac{٤}{جا(١٨٠ - هـ)}$$

$$\frac{ر}{جتا هـ} = \frac{شَ}{١} = \frac{٤}{جا هـ}$$

خلاص كدا كمل انت الحل

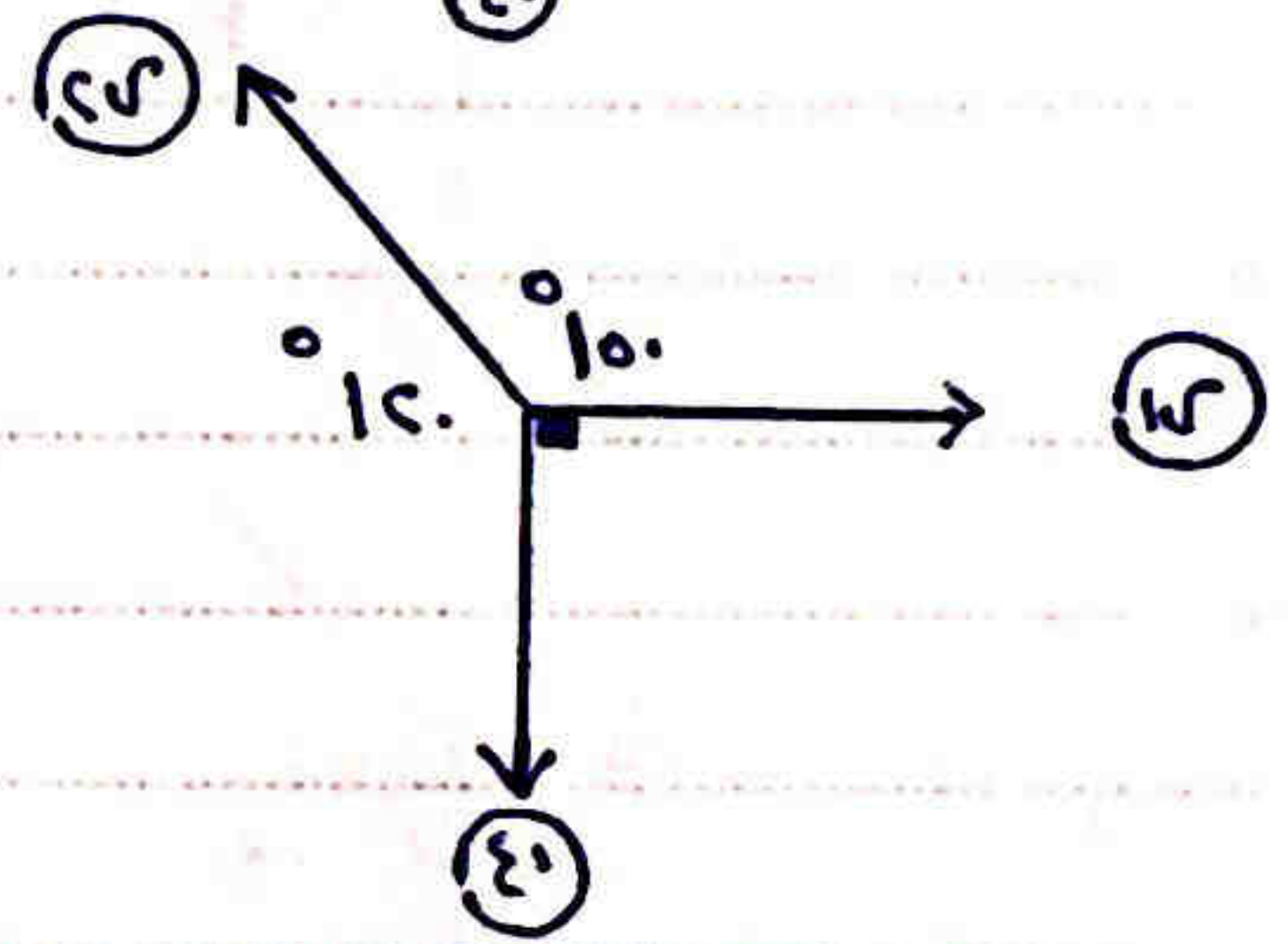
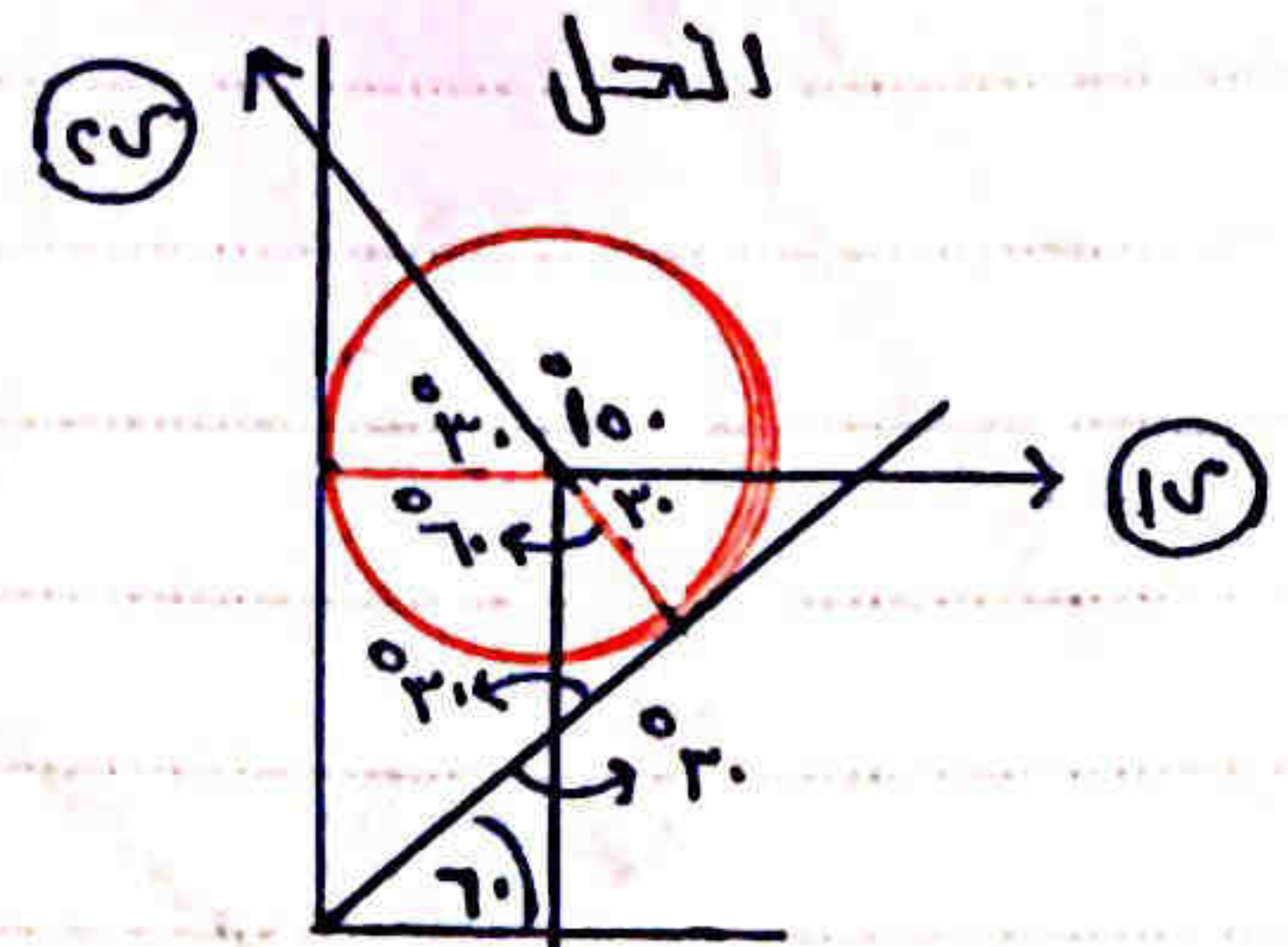
بس خلي بالك ▪ $جا هـ = \frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٤}{٥}$

▪ $جتا هـ = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

ر = ...

شَ = ...

Scanned with CamScanner

مثال كرة من الحديد وزنها ٤٠ نيوتن مستقرة بين حائط رأسي أملس ومستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل؟

الحل

قاعدة لامي يا برنس

$$\frac{ر_1}{\text{حا } 120} = \frac{ر_2}{\text{حا } 90} = \frac{40}{\text{حا } 150}$$

- $ر_1 = \frac{40 \times \text{حا } 120}{\text{حا } 150} = 40\sqrt{3}$ نيوتن

- $ر_2 = \frac{40 \times \text{حا } 90}{\text{حا } 150} = 80$ نيوتن

مثال كرة معدنية ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان في مستوى أفقي واحد والبعد بينهما يساوي طول نصف قطر الكرة أوجد الضغط على كل من القضيبين اذا كان وزن الكرة يساوي ١٠ نيوتن؟

الحل

△ م ب جـ متساوي الأضلاع يا معلم

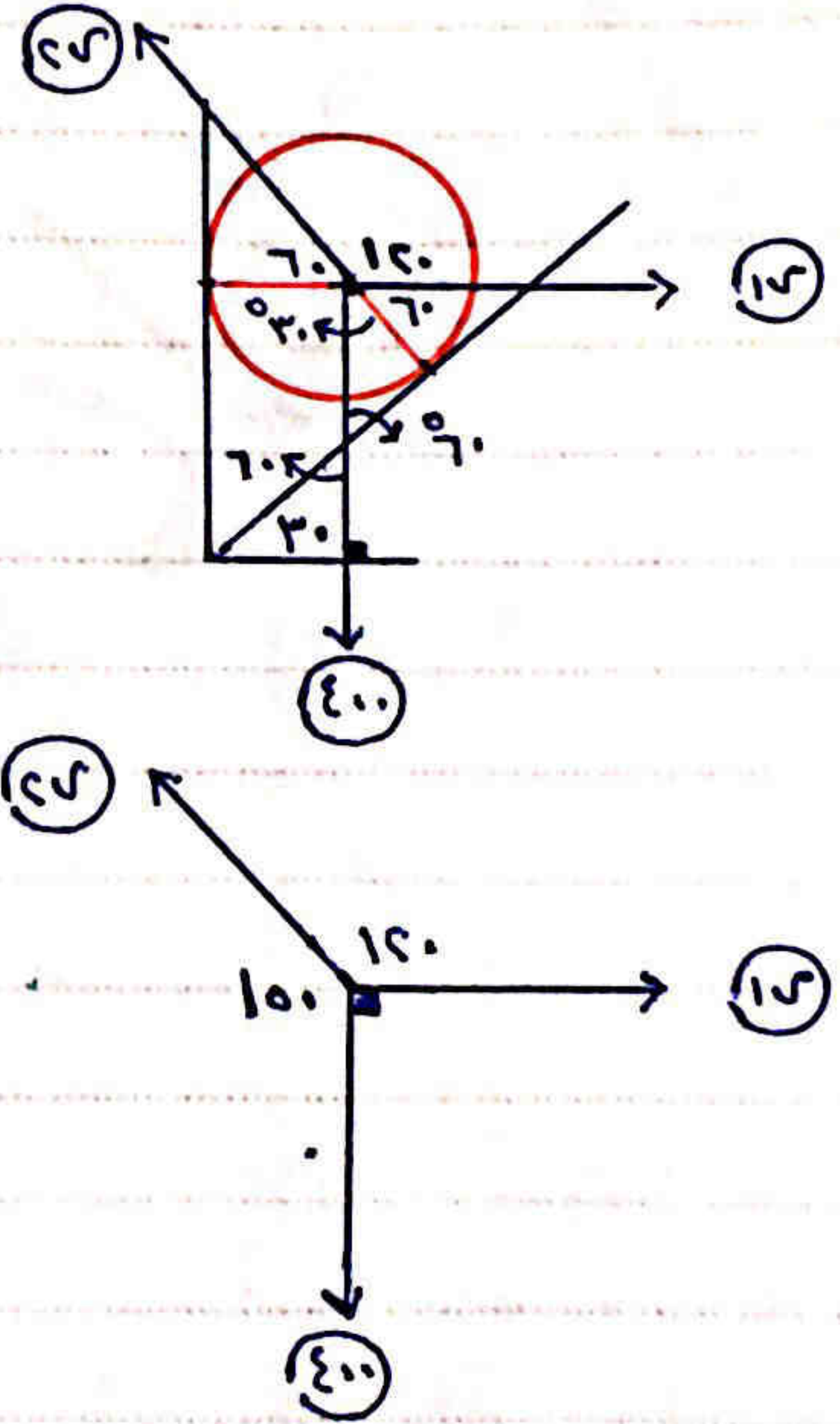
قاعدة لامي

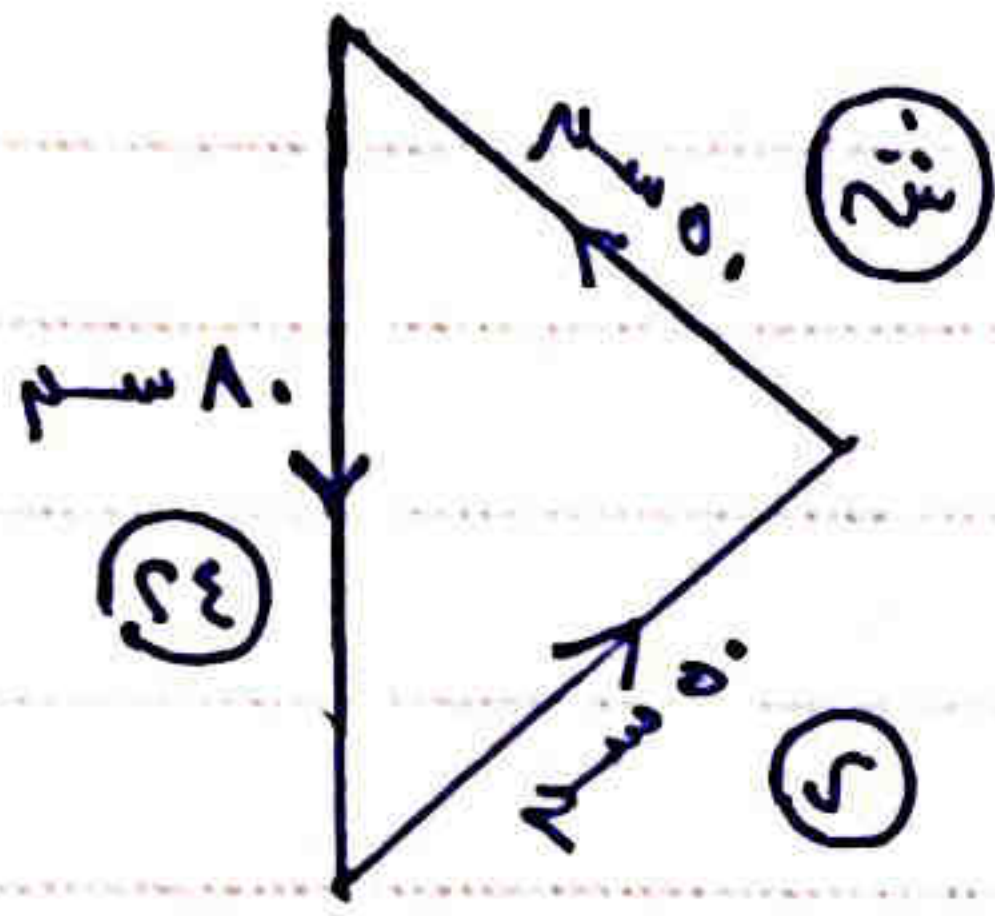
$$\frac{ر_2}{\text{حا } 150} = \frac{ر_1}{\text{حا } 150} = \frac{10}{\text{حا } 60}$$

- $ر_1 = \frac{10 \times \text{حا } 150}{\text{حا } 60} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ نيوتن

- $ر_2 = \frac{10 \times \text{حا } 150}{\text{حا } 60} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ نيوتن

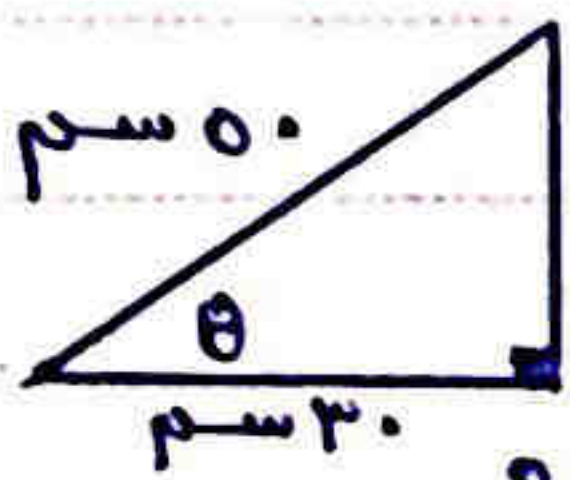
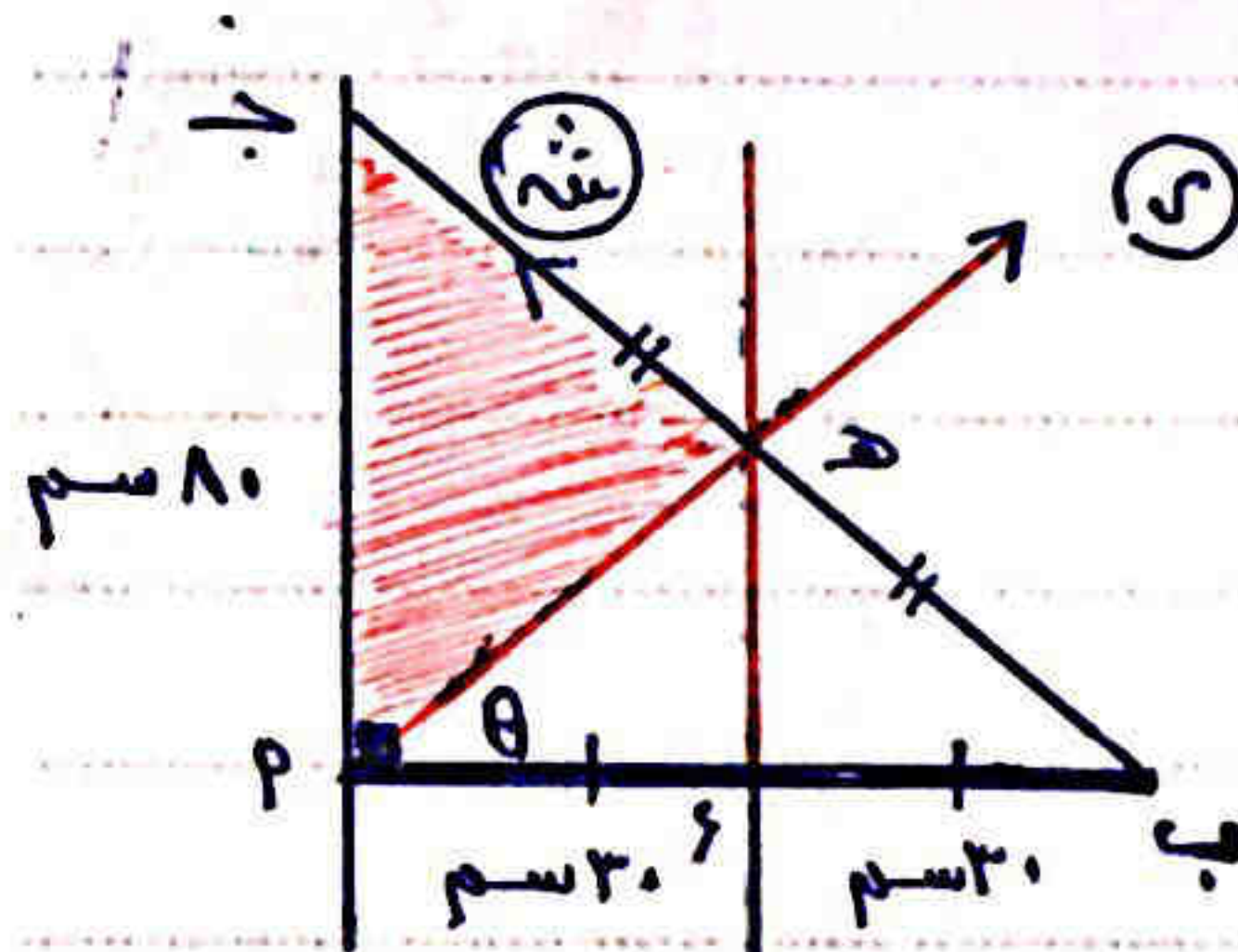
Scanned with CamScanner

مثال كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث جم يؤثر في مركزها موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية ° أوجد رد فعل كل من المستويين؟

الحل

طبق يا حبيبي قاعدة لامي

$$\frac{\text{س}_1}{\text{جا }١٥٠} = \frac{\text{س}_2}{\text{جا }٩٠} = \frac{٤٠٠}{\text{جا }١٢٠}$$

$$\text{س}_1 = \frac{٤٠٠ \times \text{جا }١٥٠}{\text{جا }١٢٠} = ٢٣٠{,}٩ \text{ ث جم}$$

$$\text{س}_2 = \frac{٤٠٠ \times \text{جا }٩٠}{\text{جا }١٢٠} = ٤٦١{,}٩ \text{ ث جم}$$

Scanned with CamScanner

مثال: $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٢٤ ث كجم يؤثر في نقطة (ء) منتصف $\overline{أب}$ ، القضيب متصل طرفه (أ) بمفصل في حائط رأسي وطرفه (ب) مربوط في احدى نهايتي خيط خفيف مثبت نهايته الأخرى في نقطة (ج) على الحائط تقع فوق (أ) تماماً وعلى بعد ٨٠ سم من (أ) فاذا اتزن القضيب في وضع أفقي. أوجد الشد في الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند (أ)

الحل

■ $\overline{بج} = \sqrt{٨٠^2 + ٦٠^2}$
= ١٠٠ سم

■ $\overline{أهـ}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ $\overline{أهـ} = \frac{1}{2}$ ب ج $= \frac{1}{2} \times ١٠٠ = ٥٠$ سم

حد هيسأل ليه لأنها هـ منتصف ب ج

لأن يا معلم ، منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{ءهـ} \parallel \overline{أج}$

∴ هـ منتصف $\overline{بج}$ بس كدا

وطبعاً" ء منتصف $\overline{أب}$ لأن القضيب منتظم

قاعدة مثلث القوى

$$\frac{٢٤}{٨٠} = \frac{ش}{٥٠} = \frac{ر}{٥٠}$$

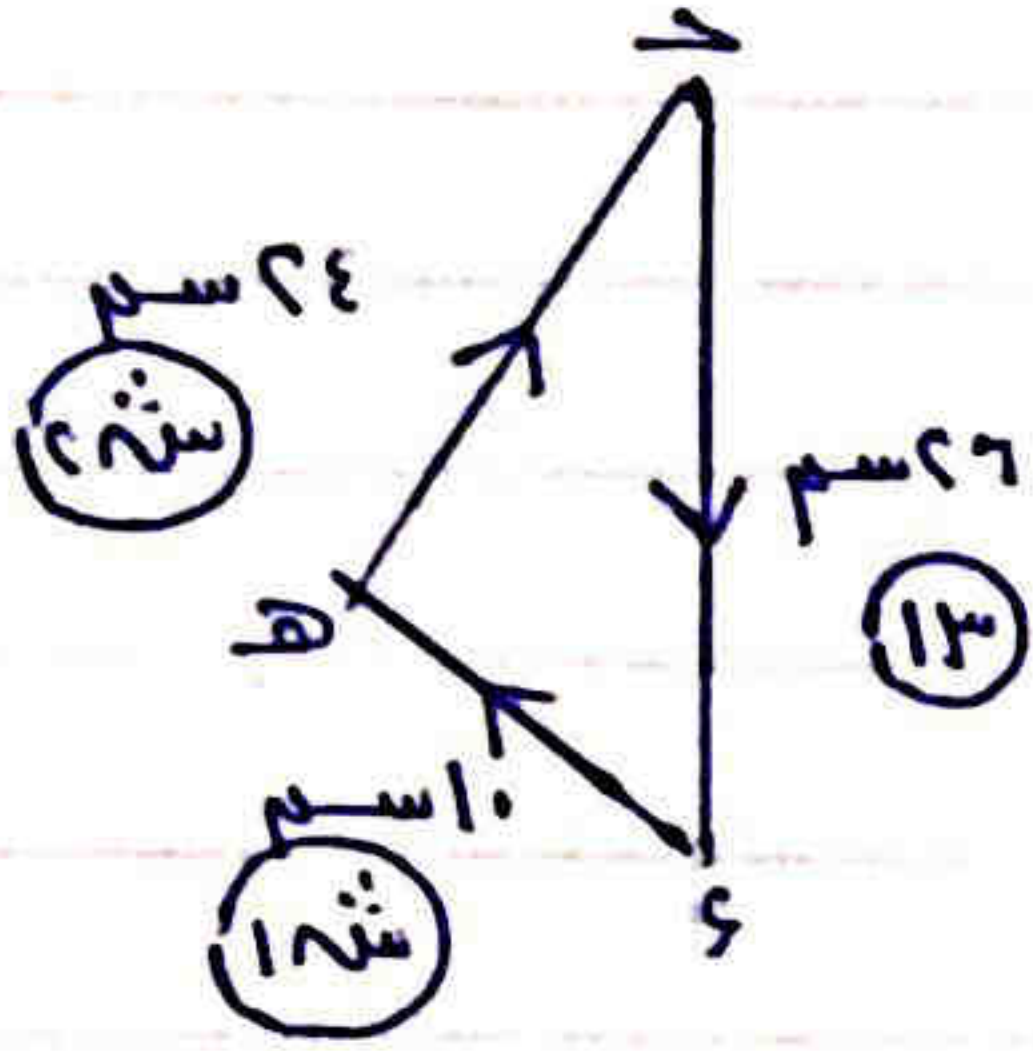
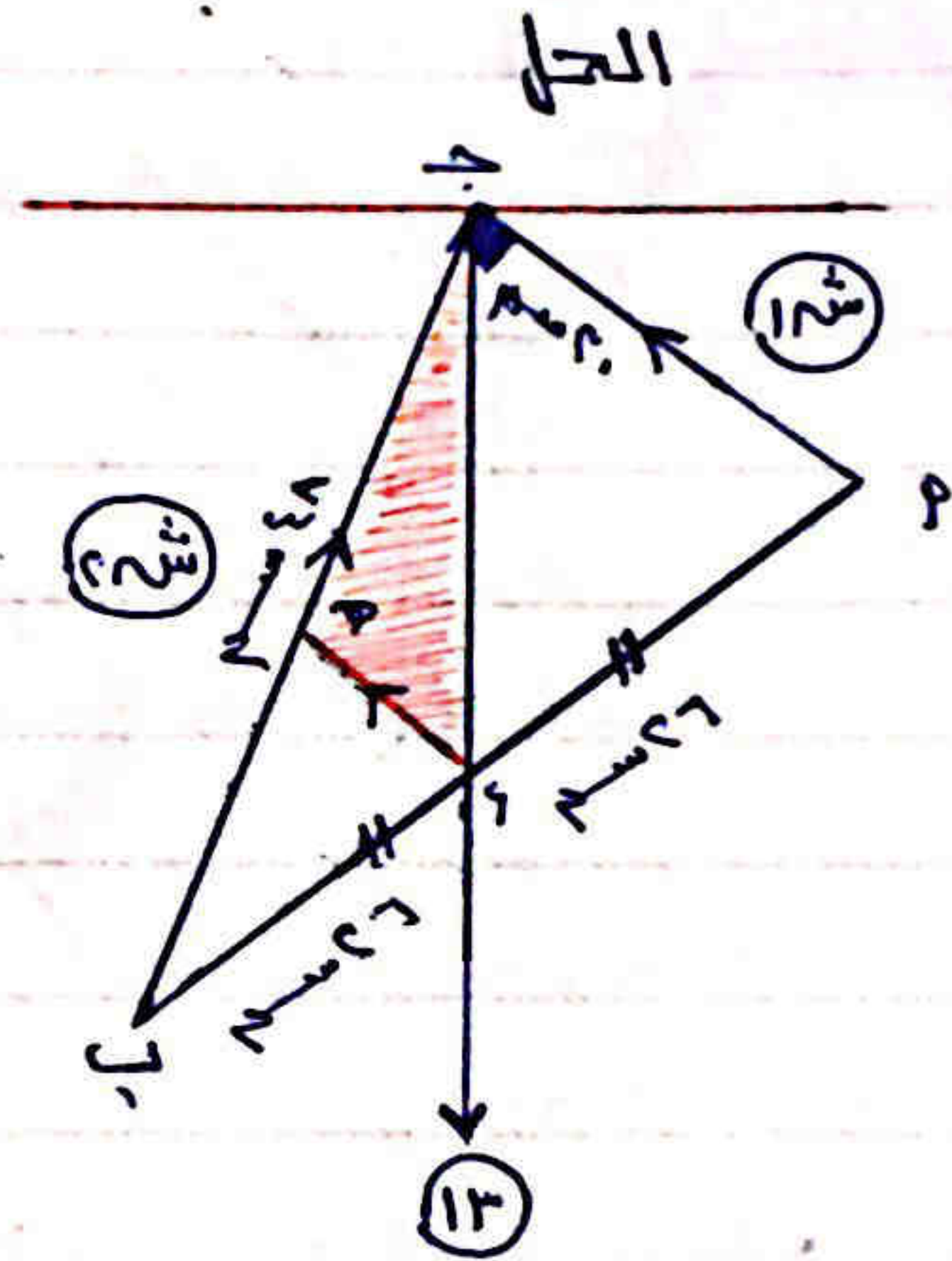
■ ش $= \frac{٢٤ \times ٥٠}{٨٠} =$ ١٥ ث كجم

■ ر $= \frac{٢٤ \times ٥٠}{٨٠} =$ ١٥ ث كجم

■ جتا $\theta = \frac{٣٠}{٥٠}$

∴ $\theta = ٥٣^\circ \; ٧' \; ٤٨''$ #

خلي بالك هو قال القضيب اتزن في وضع أفقي

Scanned with CamScanner

مثال: علق قضيب منتظم طوله ٥٢ سم ووزنه ١٣ نيوتن يؤثر في منتصفه علق من طرفيه بخيطين وثبت طرفهما في نقطة في السقف فإذا كان طول أحد الخيطين ٢٠سم ، ٤٨سم ، أوجد في وضع الاتزان مقدار كل من الشد في الخيطين ؟

الحل

$أب^2 = أجـ^2 + جـ ب^2$

∴ △ أجـ ب قائم في جـ

رسمنا $\overline{ءهـ}$ يوازي $\overline{أجـ}$

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ (القضيب منتظم)

∴ هـ منتصف ب جـ ∴ جـ هـ = ٢٤سم

، $\overline{ءهـ} = \frac{1}{2}\, \overline{أجـ} = \frac{1}{2} \times 20 = 10$ سم

∵ $\overline{جـ ء}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ $\overline{جـ ء} = \frac{1}{2}\, \overline{أب} = 26$ سم

قاعدة مثلث القوى

$$\frac{13}{26} = \frac{ش_1}{10} = \frac{ش_2}{24}$$

$$ش_1 = \frac{13 \times 10}{26} = 5 \text{ نيوتن}$$

$$ش_2 = \frac{13 \times 24}{26} = 12 \text{ نيوتن}$$

Scanned with CamScanner

مثال ١١ أب قضيب ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٢٤ ث كجم يؤثر عند منتصفها والطرف (أ) مثبت بمفصل في حائط رأسي والطرف (ب) مربوط في خيط خفيف طوله ٨٠√٣ سم مثبت طرفه الآخر في (جـ) على الحائط تقع رأسياً فوق (أ) وعلى بعد من (أ) يساوي ٨٠ سم . فاذا اتزن الساق فاوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل

الحل

ركز الباشا محددش هل الساق أفقية أم تميل بزاوية حادة أو منفرجة مع الحائط عند المفصل .

الحيط = ٨٠√٣ سم

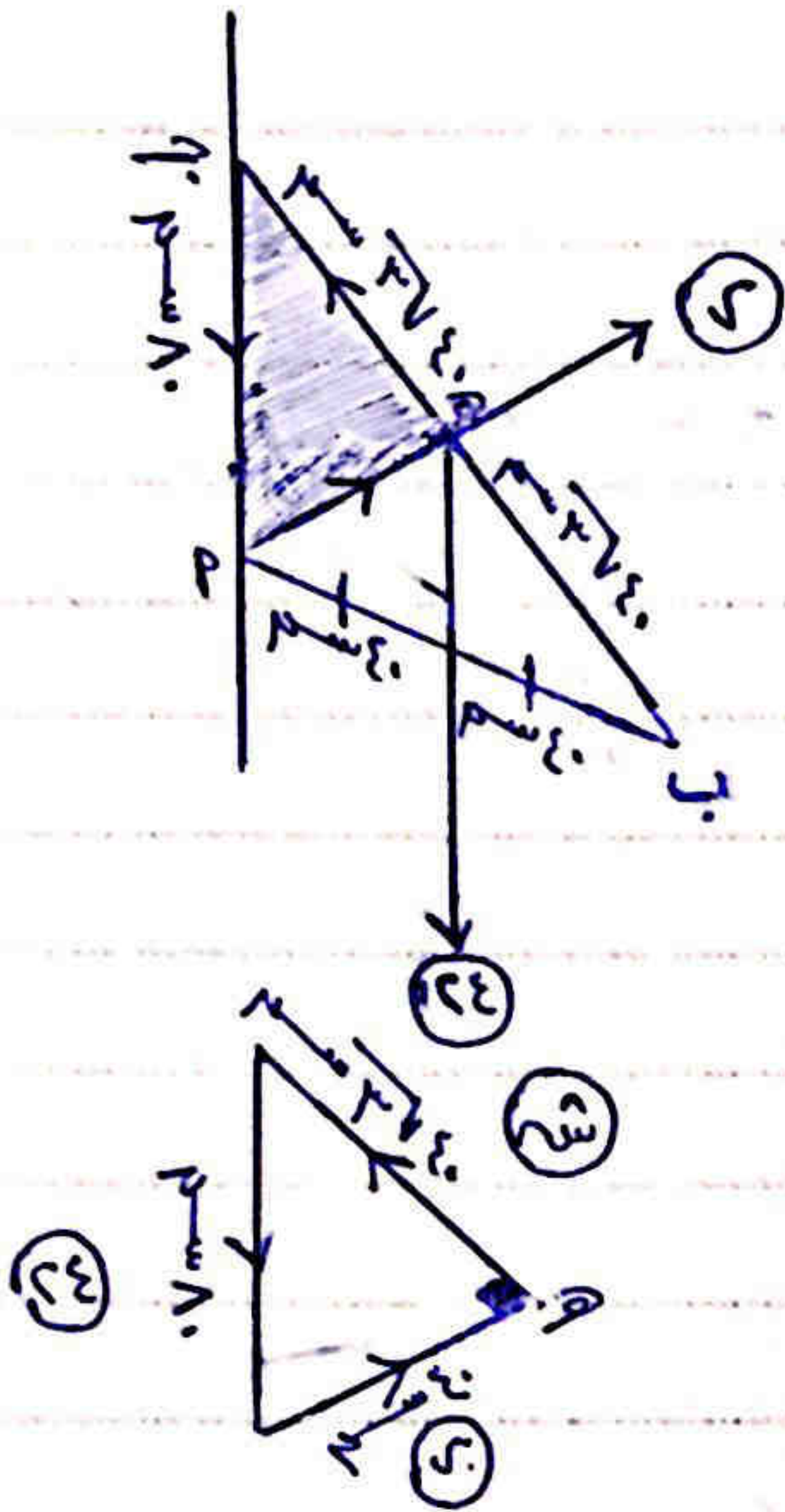
طول الساق = ٨٠ سم

المسافة الرأسية = ٨٠ سم

▪ ← (٨٠√٣)² مربع طول الخيط

▪ مربع طول الساق + مربع المسافة الرأسية
= (٨٠)² + (٨٠)²

∴ (٨٠√٣)² > (٨٠)² + (٨٠)²

هنا يعني أن زاوية ميل القضيب مع الرأسي منفرجة .

خلي بالك △ أب جـ متساوي الساقين
∵ هـ منتصف بـ جـ ∴ △ أ هـ د قائم في هـ

∴ أ هـ = $\sqrt{(٨٠)^2 - (٤٠\sqrt{٣})^2}$ = ٤٠ سم

قاعدة مثلث القوى :

$$\frac{ش}{٤٠\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٤٠} = \frac{٢٤}{٨٠}$$

ر = $\frac{٢٤ \times ٤٠}{٨٠}$ = ١٢ ث . كجم

ش = $\frac{٢٤ \times ٤٠\sqrt{٣}}{٨٠}$ = ١٢√٣ ث كجم

Scanned with CamScanner

مثال قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ١٢٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقاً خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما في نقطة واحدة فاذا كان طولا الخيطين ٣٠ سم ، ٤٠ سم على الترتيب فأوجد مقدار الشد في كل منهما

الحل

القضيب منتظم ∴ د منتصف $\overline{اب}$

∵ $(اب)^2 = (اجـ)^2 + (بجـ)^2$

∴ Δ اجـب قائم في جـ

∵ $\overline{جـد}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ $\overline{جـد} = \frac{1}{2}\overline{اب} = ٢٥$سم

رسمنا $\overline{دهـ} \,//\, \overline{اجـ}$

∵ د منتصف $\overline{اب}$ ∴ هـ منتصف $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{دهـ} = \frac{1}{2}\overline{اجـ} = ١٥$سم

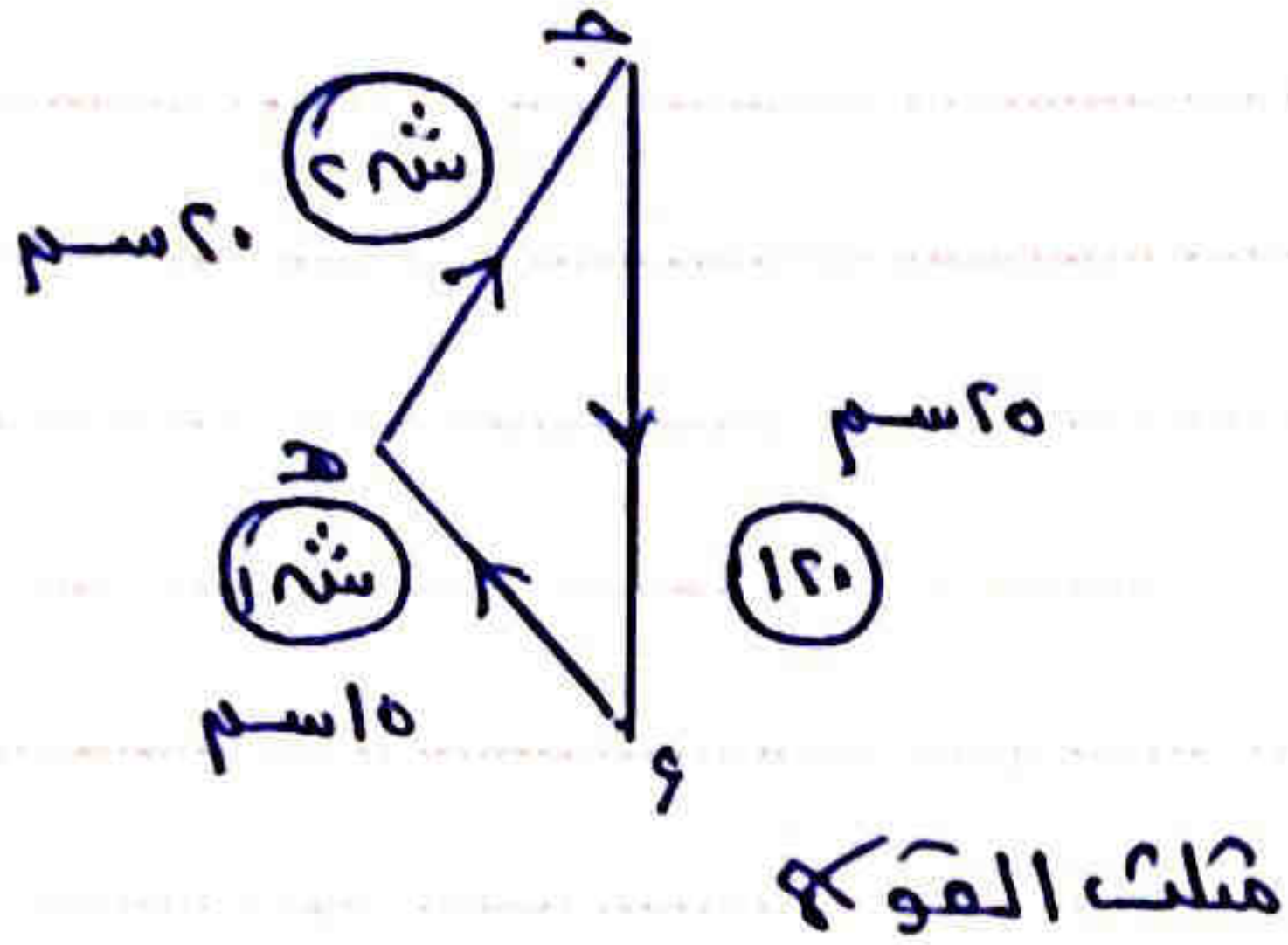
، $\overline{هـجـ} = \frac{1}{2}\overline{بجـ} = ٢٠$سم

مثلث القوى

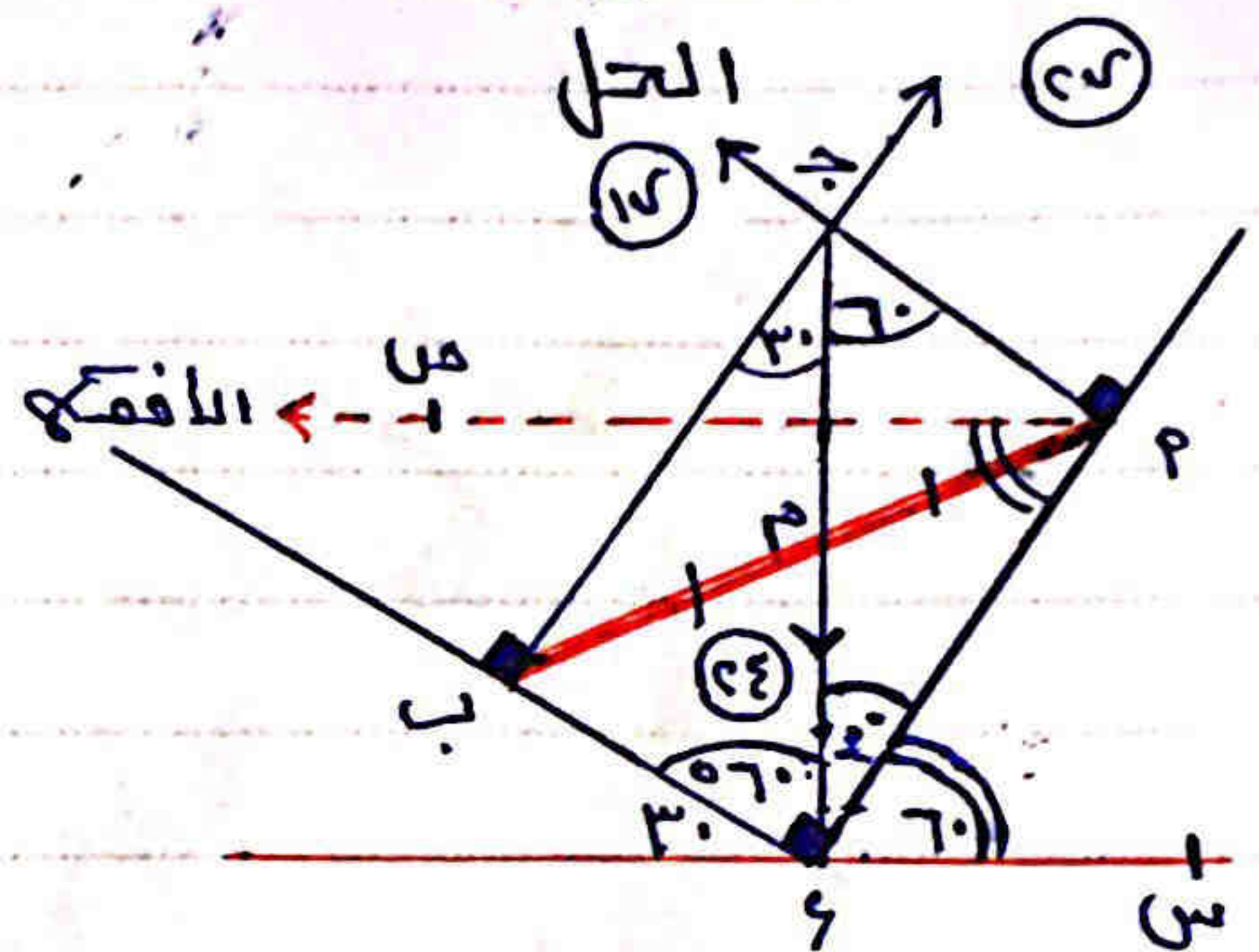
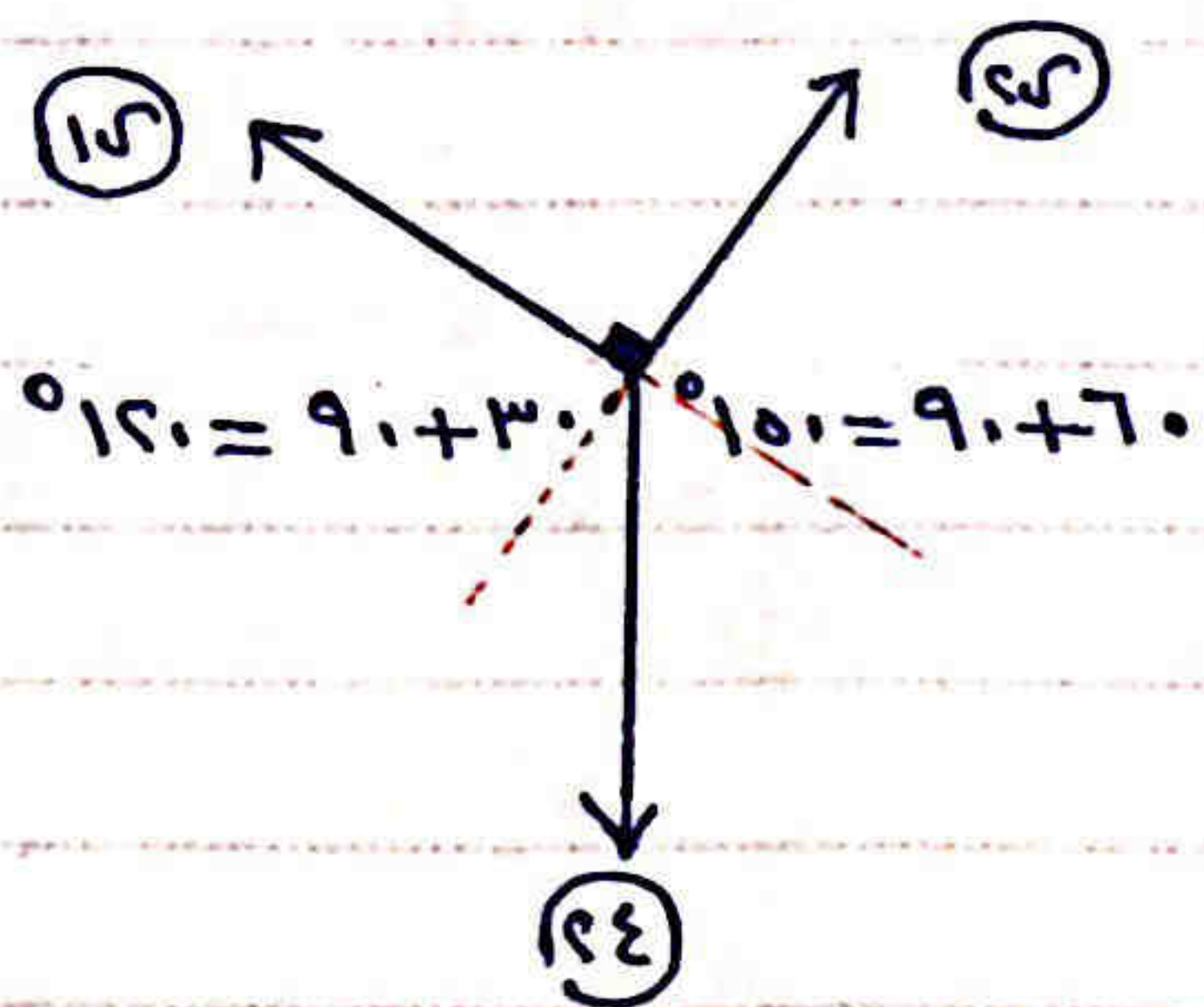
$$\frac{١٢٠}{٢٥} = \frac{شـ_١}{١٥} = \frac{شـ_٢}{٢٠}$$

$$شـ_١ = \frac{١٢٠ \times ١٥}{٢٥} = ٧٢ \text{ ث.كجم}$$

$$شـ_٢ = \frac{١٢٠ \times ٢٠}{٢٥} = ٩٦ \text{ ث.كجم}$$

Scanned with CamScanner

مثال: قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقي زاويتين قياسهما ٦٠°، ٣٠° أوجد قياس الزاوية التي يصنعها القضيب مع الأفقي في وضع التوازن وإذا كان مقدار وزنه ٢٤ نيوتن أوجد مقدار رد فعل كل من المستويين؟

الحل

حـ و رأسياً ⊥ و س

شكل تنسك فيه زوايا متبادلة وكذا

قاعدة لامي

$$\frac{٢٤}{جا ٩٠} = \frac{ر٢}{جا ١٢٠} = \frac{ر١}{جا ١٥٠}$$

ر١ = ١٢ نيوتن

ر٢ = ١٢ √٣ نيوتن

Δ أ م جـ ∵ م أ = م جـ

∴ ق(∠ م جـ أ) = ٣٠°

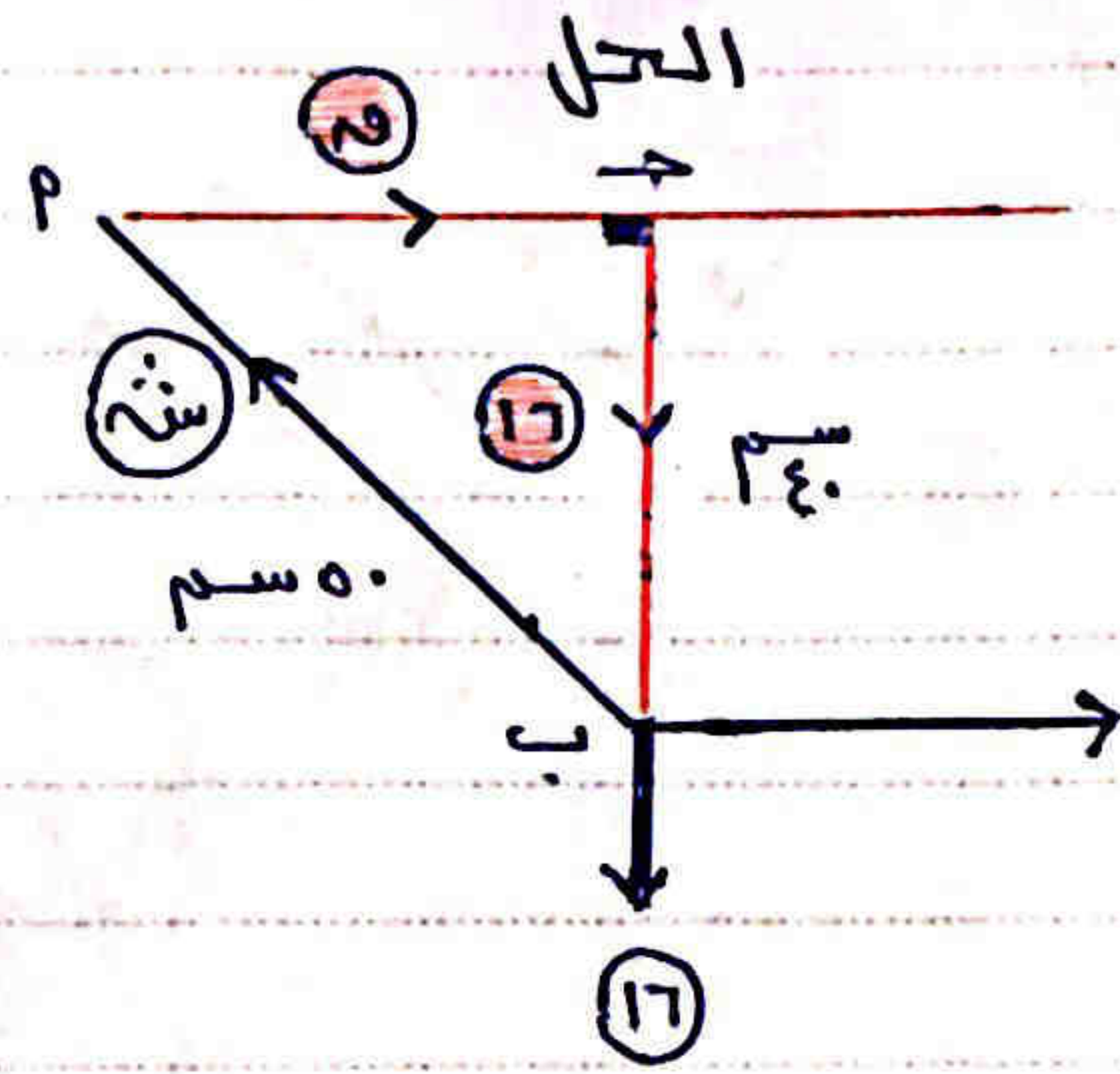
∵ ق(∠ ص أ و) = ق(∠ أ و س) بالتبادل = ٦٠°

∴ ق(∠ ص أ ب) = ٦٠ − ٣٠ = ٣٠°

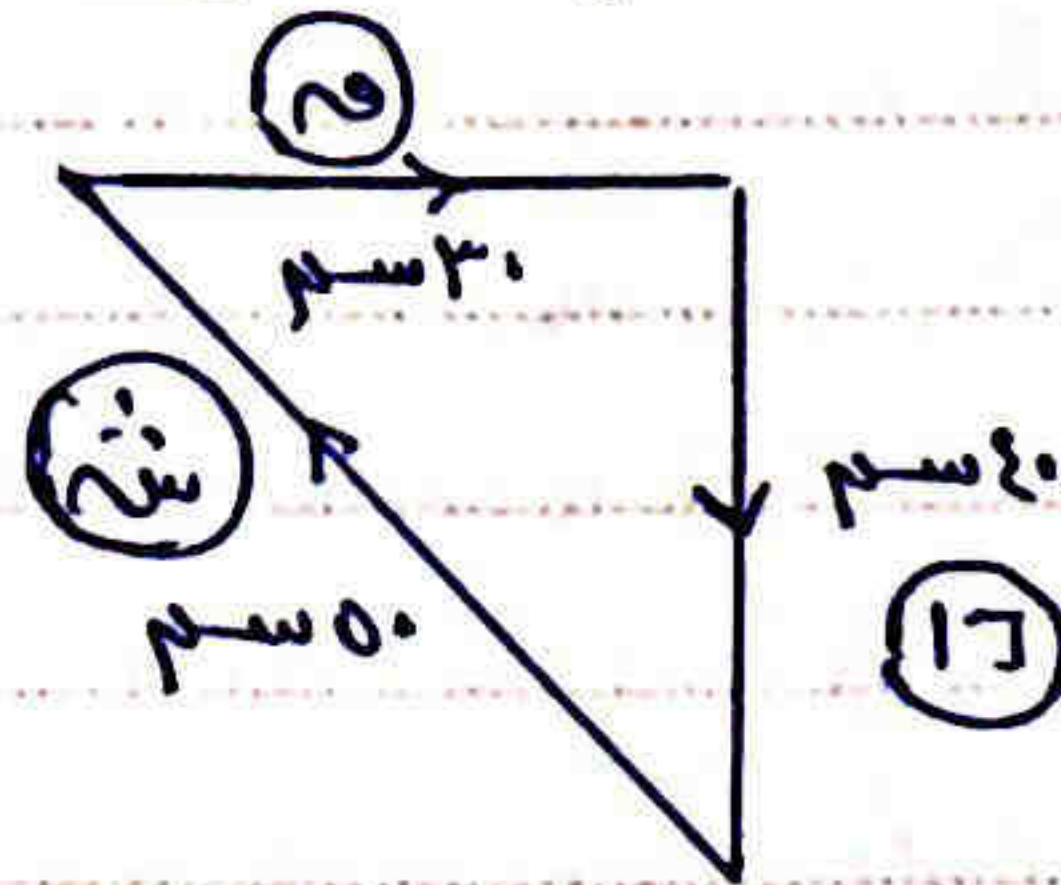
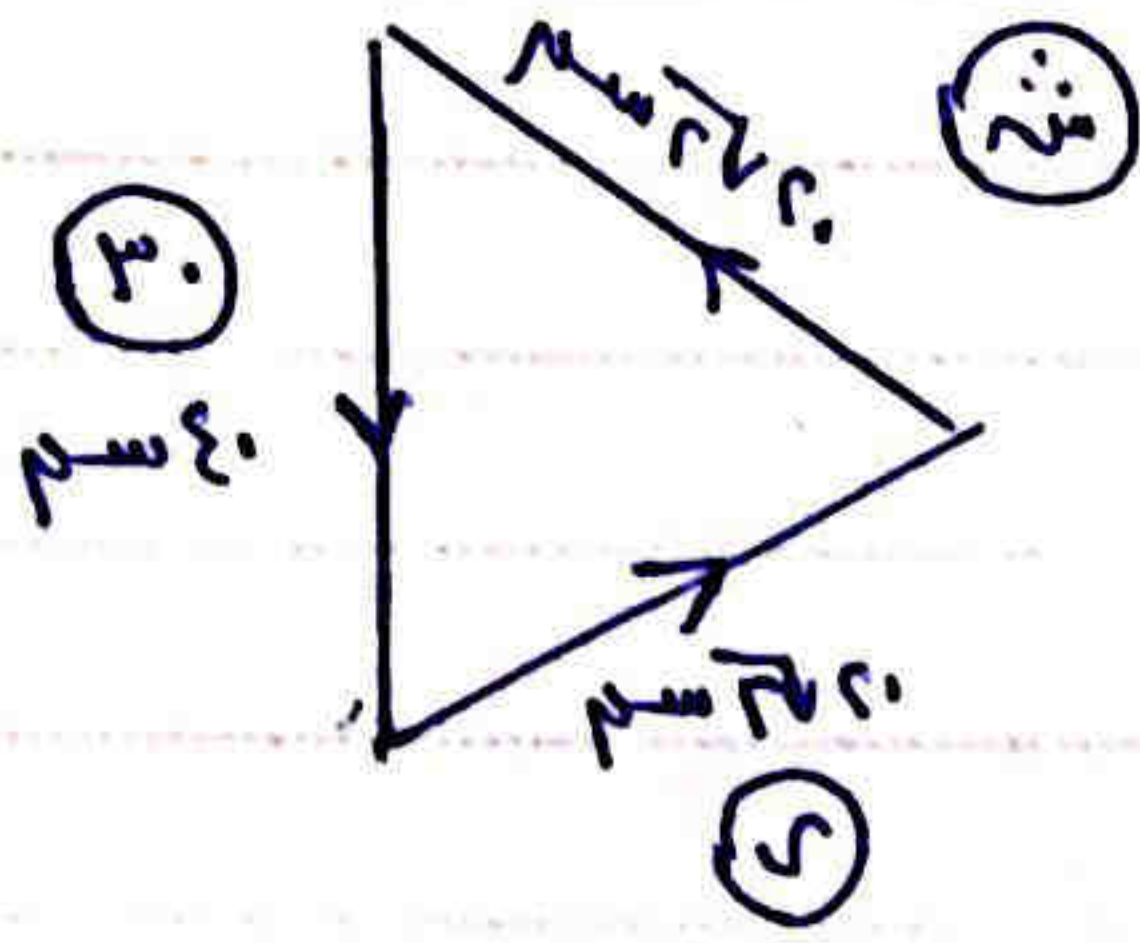
وهي زاوية الميل على الأفقي

يعني القضيب يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الأفقي.

Scanned with CamScanner

مثال: علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف طوله ٥٠ سم مثبت طرفه الآخر في نقطة في سقف حجرة ، أزيح الثقل بقوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٤٠ سم من السقف أوجد مقدار القوة الأفقية والشد في الخيط ؟

الحل

$أجـ = \sqrt{٥٠^٢ - ٤٠^٢} = ٣٠$ سم

قاعدة مثلث القوى لمى وعيش

$\frac{١٦}{٤٠} = \frac{ق}{٣٠} = \frac{ش}{٥٠}$

∴ ق = ١٢ نيوتن

ش = ٢٠ نيوتن

مثال (خاص بالمستوى المائل) : في الشكل التالي جسم وزنه (و) وضع على مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) ربط بخيط خفيف يميل على المستوى بزاوية قياسها ٢٠° لأعلى وكان ق١ ، ق٢ هما مركبتا الشد في اتجاه المستوى والعمودي عليه فإن:

أ) ش = ق١ قا٢٠°

ب) ق١ = ش جا(هـ+٢٠°)

جـ) ق١ = ش جتا هـ

د) ق١ = ش جا(هـ+٢٠°)

الحل

▪ نحلل ش إلى مركبتان متعامدتان كالتالي :

ق١ = ش جتا٢٠ ، ق٢ = ش جا٢٠

∴ $ش = \frac{ق١}{جتا٢٠} = ق١ قا٢٠°$ #

∴ الجواب الصحيح هو (أ)

Scanned with CamScanner

مثال أب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل في حائط رأسي عند (أ) وحفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند (ب) وبنقطة (جـ) تعلو (أ) رأسياً بمسافة ٤٠ سم أوجد الشد في الخيط ورد الفعل عند (أ)؟

الحل

ب جـ $= \sqrt{٤٠^2 + ٤٠^2} = ٤٠\sqrt{٢}$

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ (القضيب منتظم)

∵ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{أجـ}$ ∴ هـ منتصف ب جـ

∵ $\overline{أهـ}$ متوسط خارج من رأس القائمة

∴ $\overline{أهـ} = \frac{1}{2}\,\overline{بجـ} = \frac{1}{2} \times ٤٠\sqrt{٢} = ٢٠\sqrt{٢}$

، جـ هـ $= \frac{1}{2}$ ب جـ $= ٢٠\sqrt{٢}$

قاعدة مثلث القوى

$$\frac{٣٠}{٤٠} = \frac{ر}{٢٠\sqrt{٢}} = \frac{ش}{٢٠\sqrt{٢}}$$

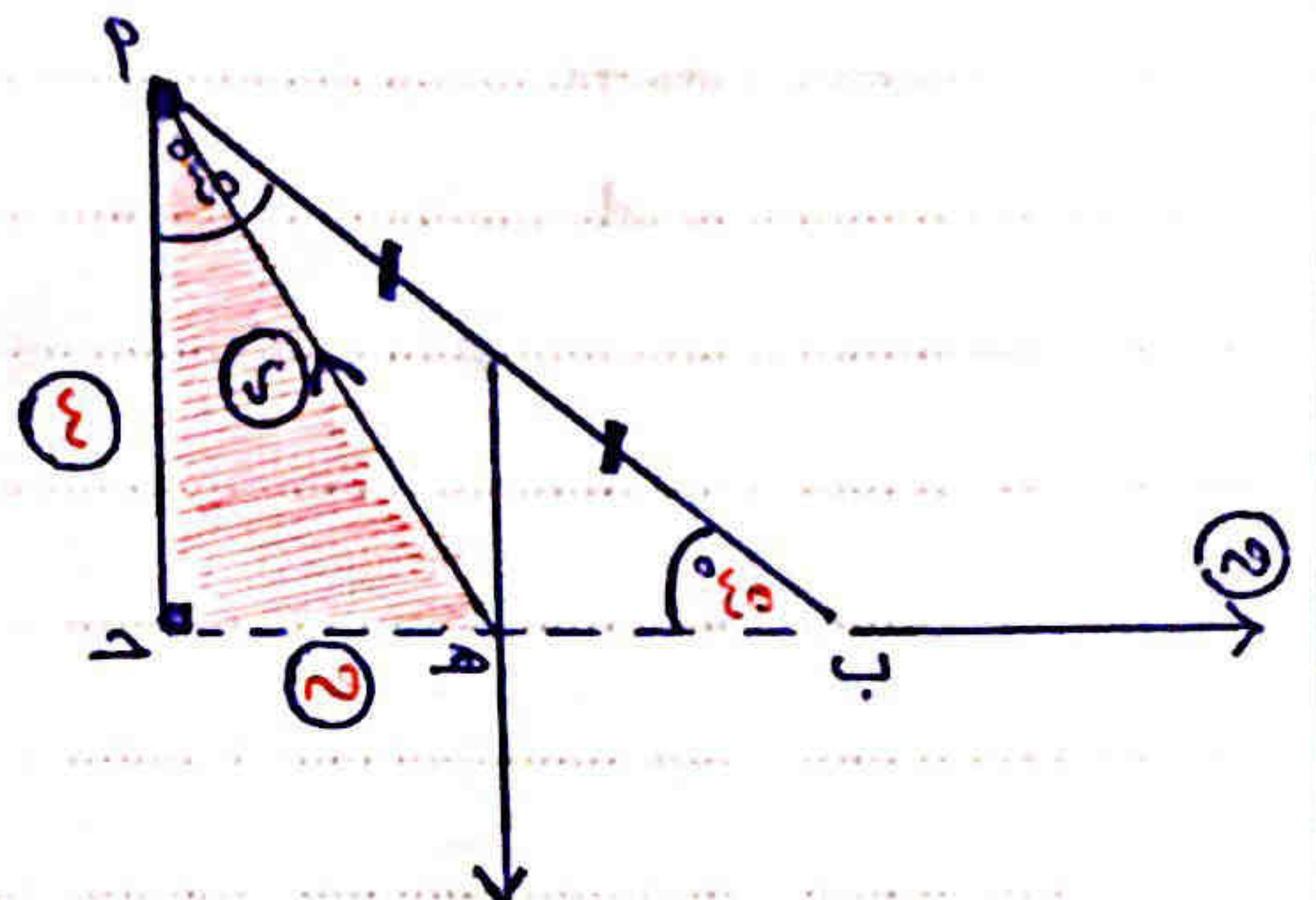
∴ ر $= ١٥\sqrt{٢}$ نيوتن

ش $= ١٥\sqrt{٢}$ نيوتن #

حبيبي هو قال حفظ القضيب في وضع أفقي، خلص الكلام

Scanned with CamScanner

مثال ١ب قضيب منتظم وزنه ٤ ث.كجم متصل طرفه ١ بمفصل ثابت في حائط رأسي أثرت عليه قوة أفقية ٥ في الطرف ب اتزن القضيب وهو يميل على الحائط الرأسي بزاوية قياسها ٤٥° احسب مقدار كل من القوة ورد فعل المفصل على القضيب؟

الحل

$\triangle$ ١ب جـ متساوي الساقين (١جـ = ب جـ)

نفرض ١جـ = ب جـ = ٢ل

∴ هـ جـ = ل ينصف ب جـ

$\triangle$ ١هـ جـ القائم في جـ

∴ ١هـ = $\sqrt{(ل)^2 + (٢ل)^2}$ = ل$\sqrt{٥}$

بتطبيق قاعدة مثلث القوى ($\triangle$ ١هـ جـ)

$$\frac{ر}{١هـ} = \frac{٥}{هـ جـ} = \frac{٤}{١جـ}$$

$$\frac{ر}{ل\sqrt{٥}} = \frac{٥}{ل} = \frac{٤}{٢ل}$$

∴ ٥ = $\frac{٤ \times ل}{٢ل}$ = ٢ ث.كجم

بالمثل ر = ٢$\sqrt{٥}$ ث.كجم #

مثال ١ب سلم وزنه ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن يرتكز بطرفه ١ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسي أملس بحيث كان طرفه العلوي يبعد عن سطح الأرض $\sqrt{٣}$ متر والطرف الآخر يبعد عن الحائط ٢ متر أوجد الضغط على كل من المستويين؟ علماً بأن السلم منتظم؟

الحل

$\triangle$ س ص ١ قائم في ص

∴ ١س = $\sqrt{(١)^2 + (\sqrt{٣})^2}$ = ٢ متر

مثلث القوى (س ص ١) فيه:

$$\frac{ر_٢}{١س} = \frac{٤\sqrt{٣}}{س ص} = \frac{ر_١}{١ص}$$

$$\frac{ر_٢}{٢} = \frac{٤\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{ر_١}{١}$$

∴ ر٢ = ٨ نيوتن

ر١ = ٤ نيوتن #

Scanned with CamScanner

① المستقيمات والمستويات في الفراغ.

⬅ نتذكر أن:

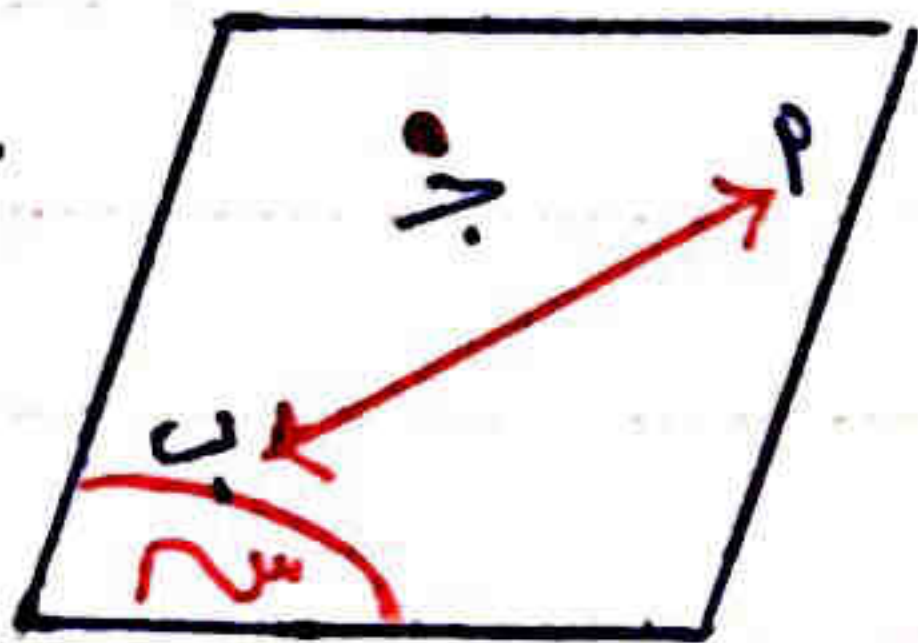
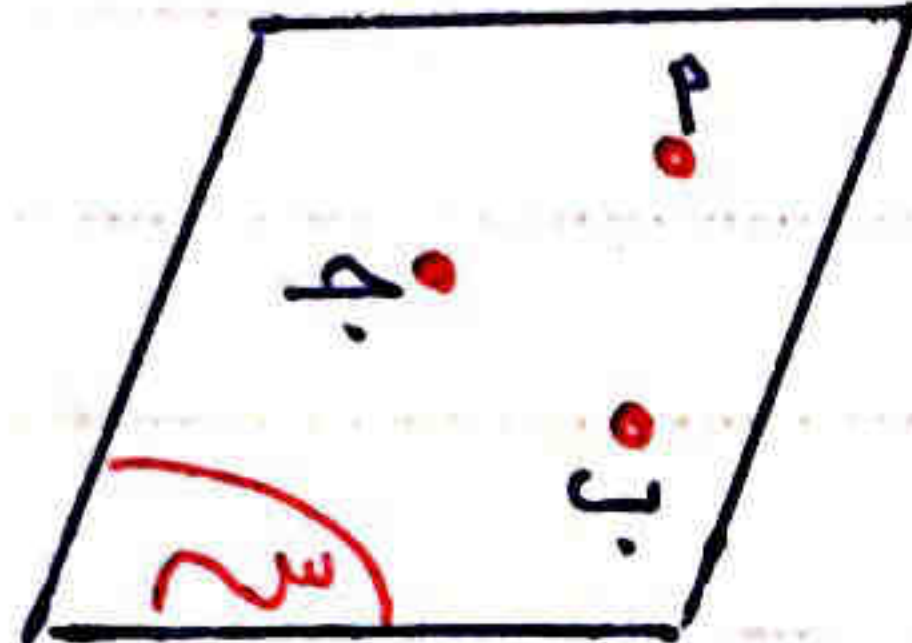
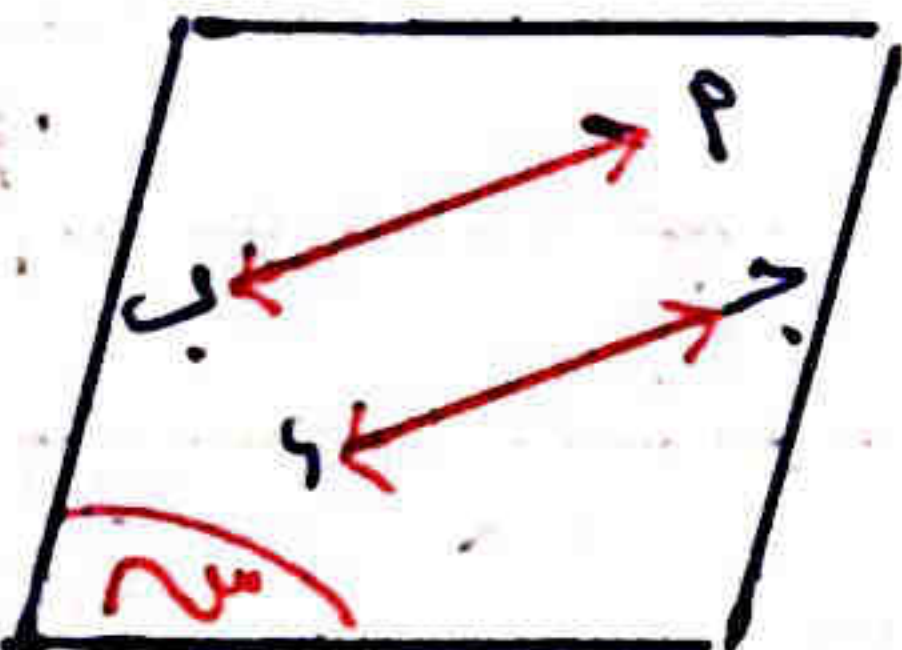
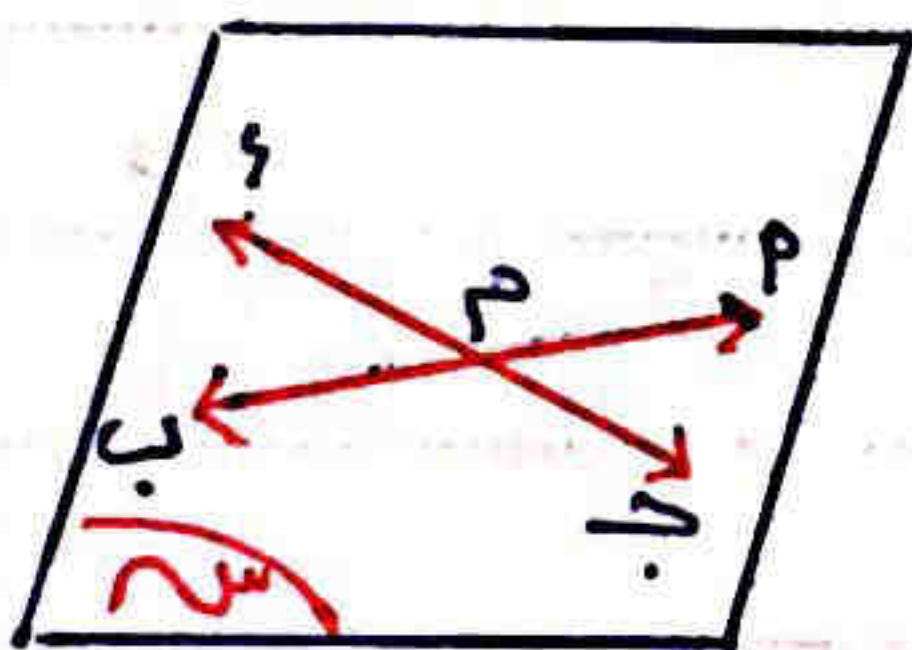
- **النقطة:**
مكان ناتج من تقاطع خطين مستقيمين أو منحنيين أو مستقيم ومنحنى.

- **الخط المستقيم:**
مجموعة غير منتهية من النقاط تقع جميعاً على استقامة واحدة حيث يتعين المستقيم بنقطتين.

- **المستوى:**
مجموعة غير منتهية من النقاط ينطبق عليها المستقيم في جميع الأوضاع.

- **الفراغ:**
مجموعة غير منتهية من النقاط ويعتبر المجموعة الشاملة التي تحتوي المستقيمات والمستويات والمجسمات.

⬅ يتعين المستوى:

- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة
الشكل (١)
- مستقيم ونقطة خارجه
الشكل (٢)
- مستقيمات متقاطعات
الشكل (٣)
- مستقيمان متوازيان غير منطبقان.
الشكل (٤)

ملاحظات حلوة أوي:

- أي نقطة في المستوى يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات.

- أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات وأيضاً عدد لا نهائي من المستقيمات.

Scanned with CamScanner

← العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفراغ:

- **المستقيم يوازي المستوى.**

$س \cap \overleftrightarrow{أب} = \phi$

$\therefore \overleftrightarrow{أب} \parallel س$

← الشكل (١)

- **المستقيم يقطع المستوى في نقطة**

$س \cap \overleftrightarrow{أب} = \{ب\}$

← الشكل (٢)

- **المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى.**

$س \cap \overleftrightarrow{أب} = \overleftrightarrow{أب}$

$\overleftrightarrow{أب} \subset س$

← الشكل (٣)

← الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ:

- **المستويان متوازيان:**

$س \cap ص = \phi$

$\therefore س \parallel ص$

← الشكل (١)

- **المستويان منطبقان:**

$س = ص$

وممكن نقول $س \cap ص = س = ص$

← الشكل (٢)

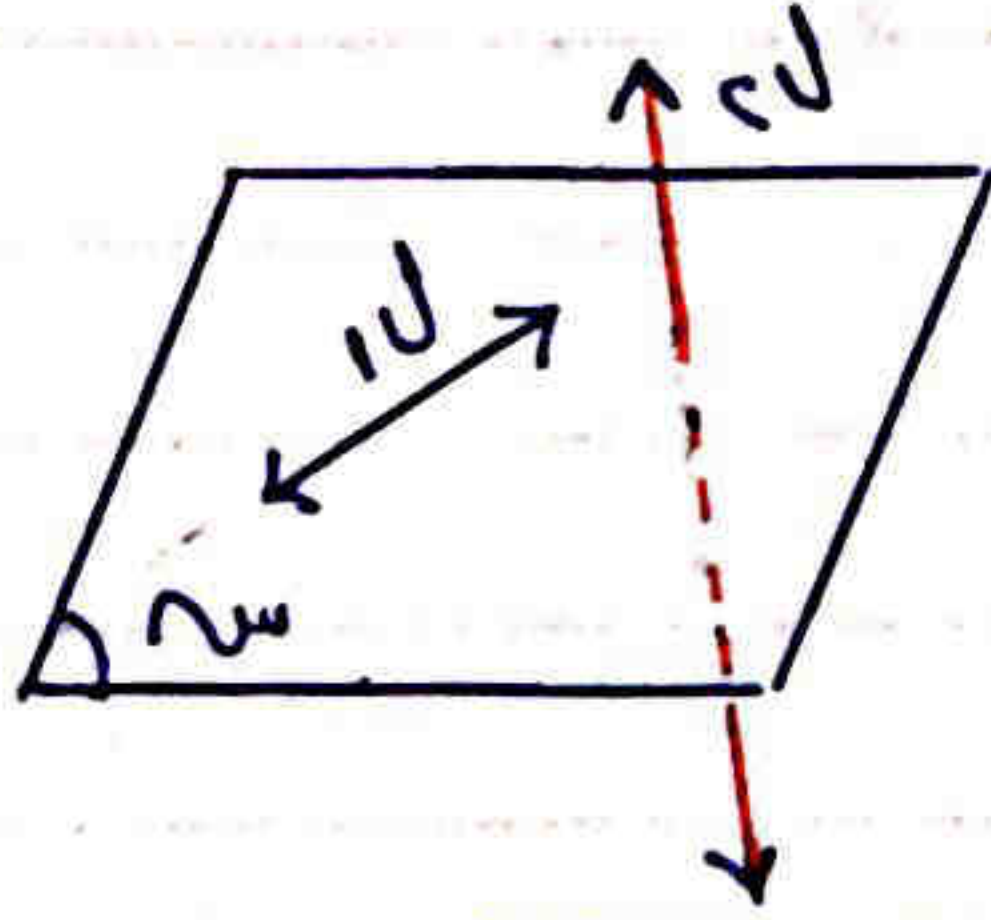
- **المستويان متقاطعان**

$س \cap ص = \overleftrightarrow{أب}$

← الشكل (٣)

Scanned with CamScanner

- أي نقطتين في الفراغ يمر بهما مستقيم واحد وعدد لا نهائي من المستويات.

- أي مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهائي من المستويات.

- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.

- اذا اشترك مستقيم ومستوى في أكثر من نقطة فان المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى.

- أقل عدد من المستويات تحدد سطح مجسم يساوي ٤ (الهرم الثلاثي)

- اذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فانهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة

س ∩ ص = ل حيث م ∈ ل

- المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ يكونان متوازيان.

- المستقيمان المتخالفان هما مستقيمان غير متوازيان وغير متقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد؟

لاحظ يا معلم:

← ل١ ، ل٢ متخالفان وذلك لأنه:

- ل١ ∩ ل٢ = ϕ
- لا يجمعهما مستوى واحد

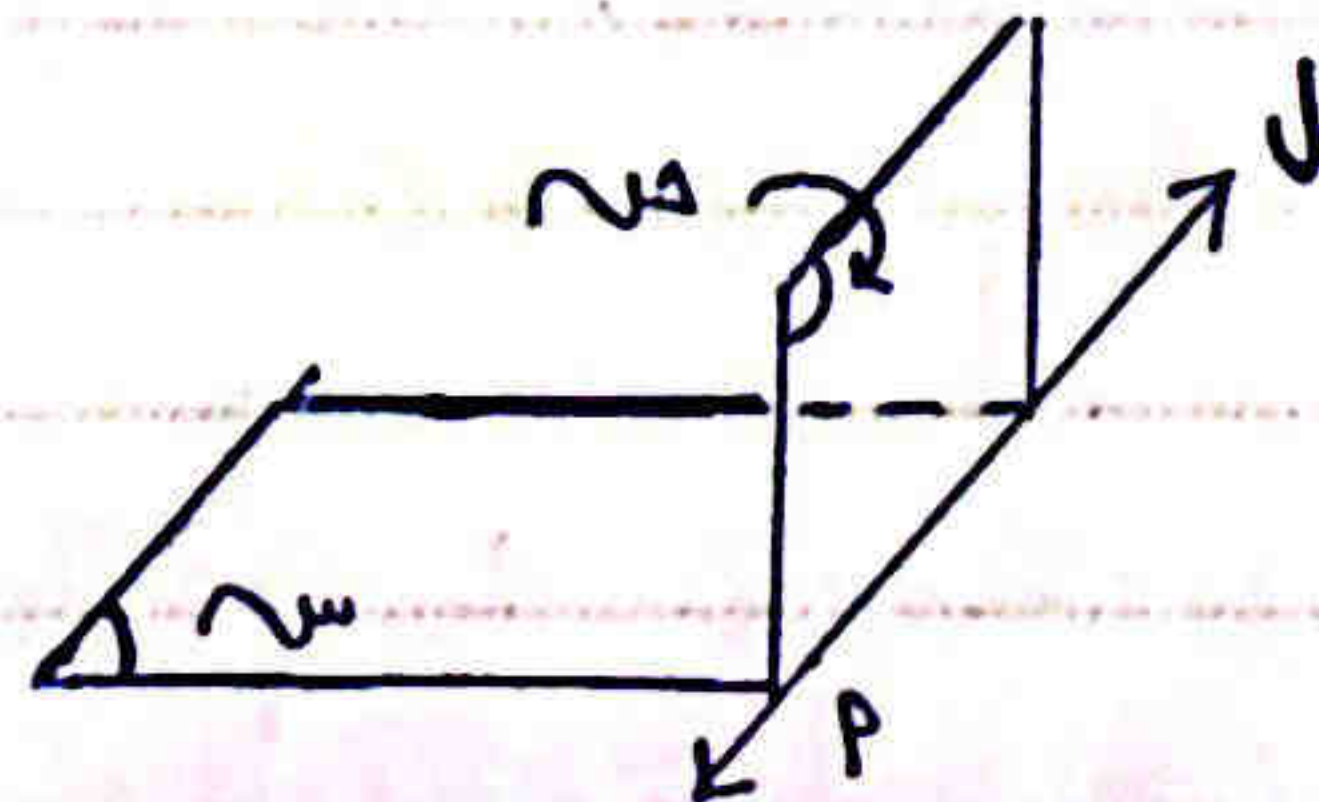
سؤال خطير:

- اذا كان : ل١ ∩ ل٢ = ϕ وكان:

← يجمعهما مستوى واحد فان:

ل١ // ل٢

← لا يجمعهما مستوى واحد فان:

ل١ ، ل٢ متخالفان.

خطر:

- المستقيمان يتقاطعان في نقطة
- المستويان يتقاطعان في مستقيم

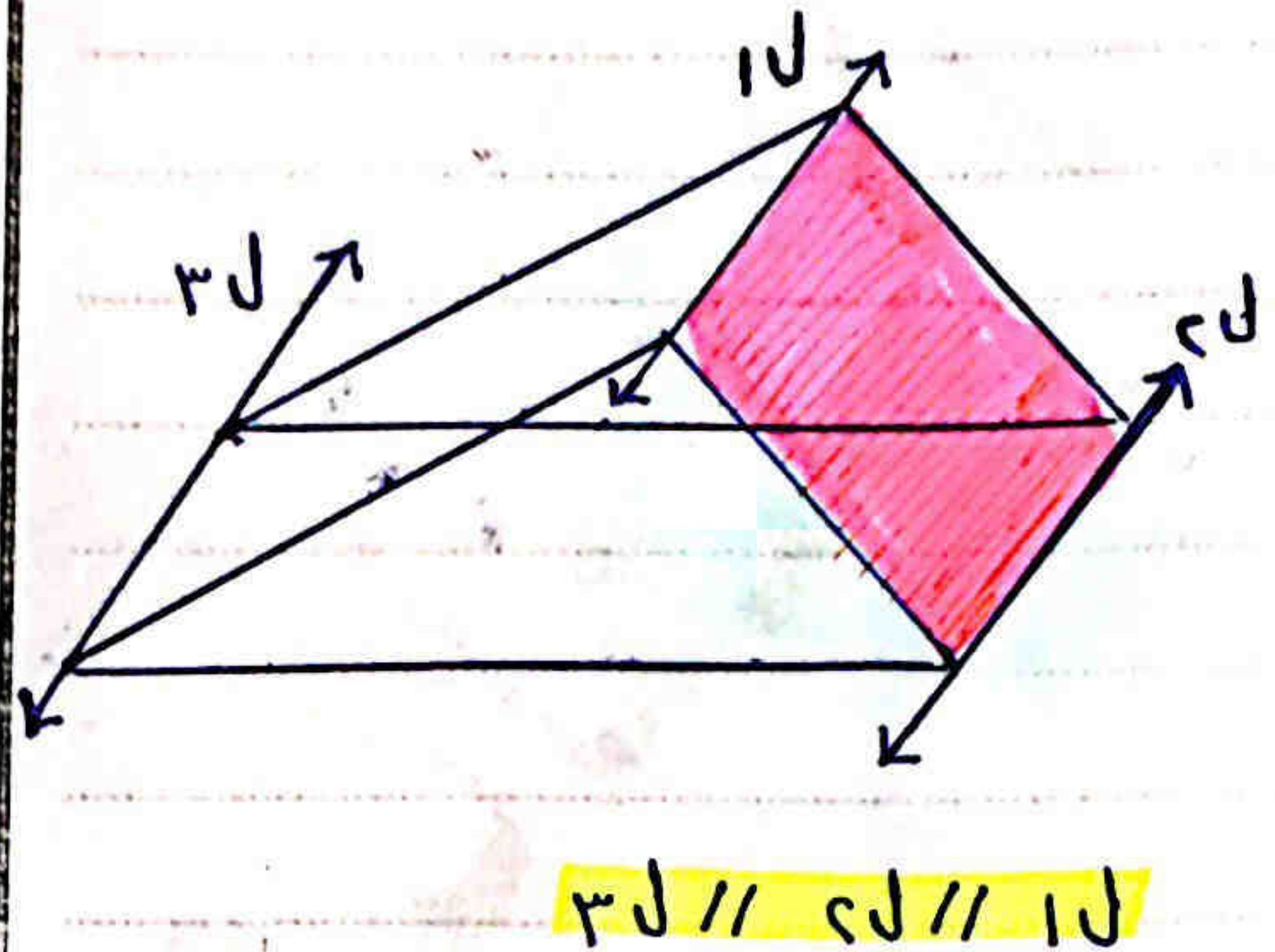
Scanned with CamScanner

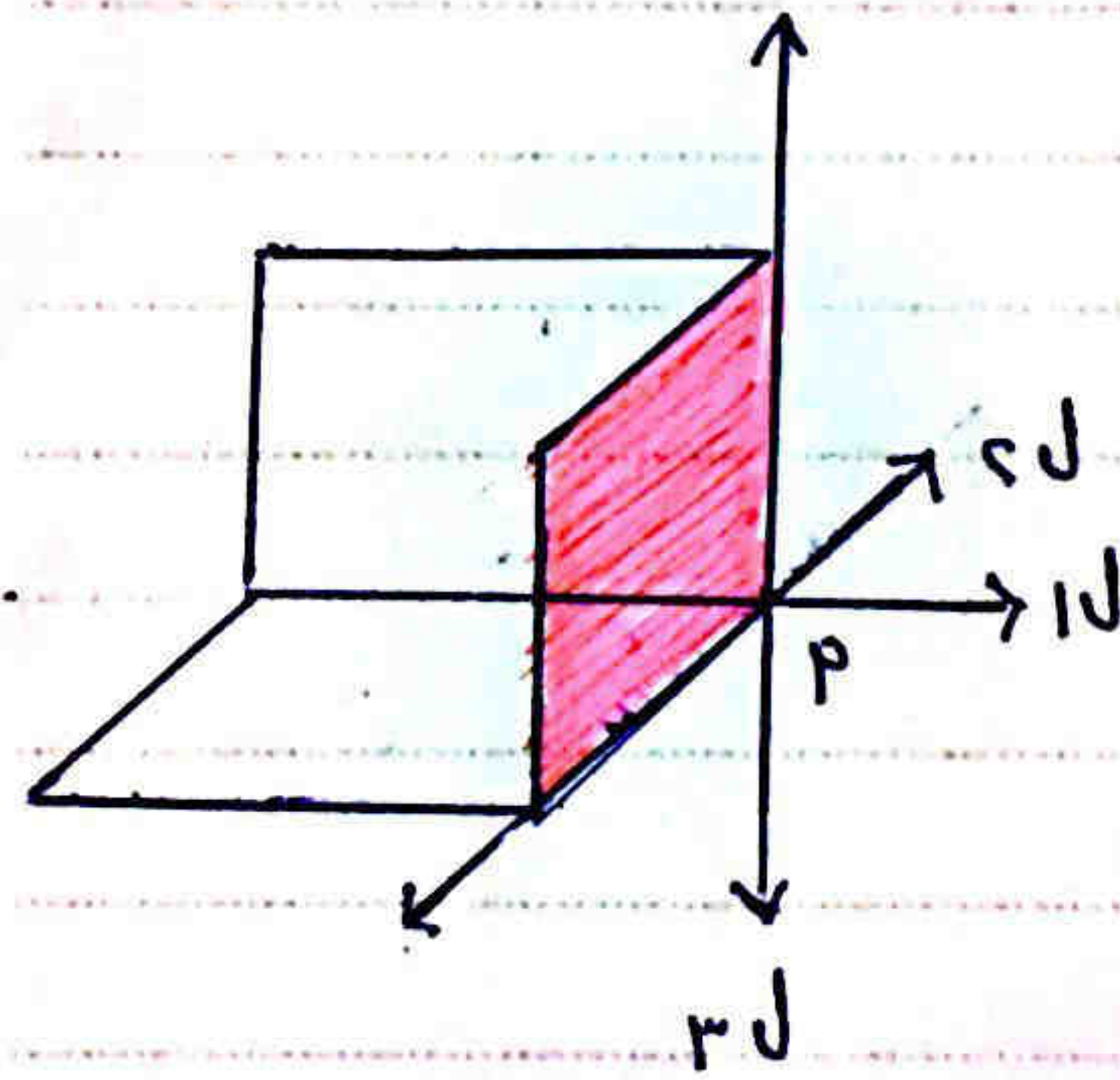
▪ اذا تقاطعت ثلاث مستويات مثنى مثنى فان مستقيمات تقاطعهما اما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعاً في نقطة واحدة.

ل١ // ل٢ // ل٣

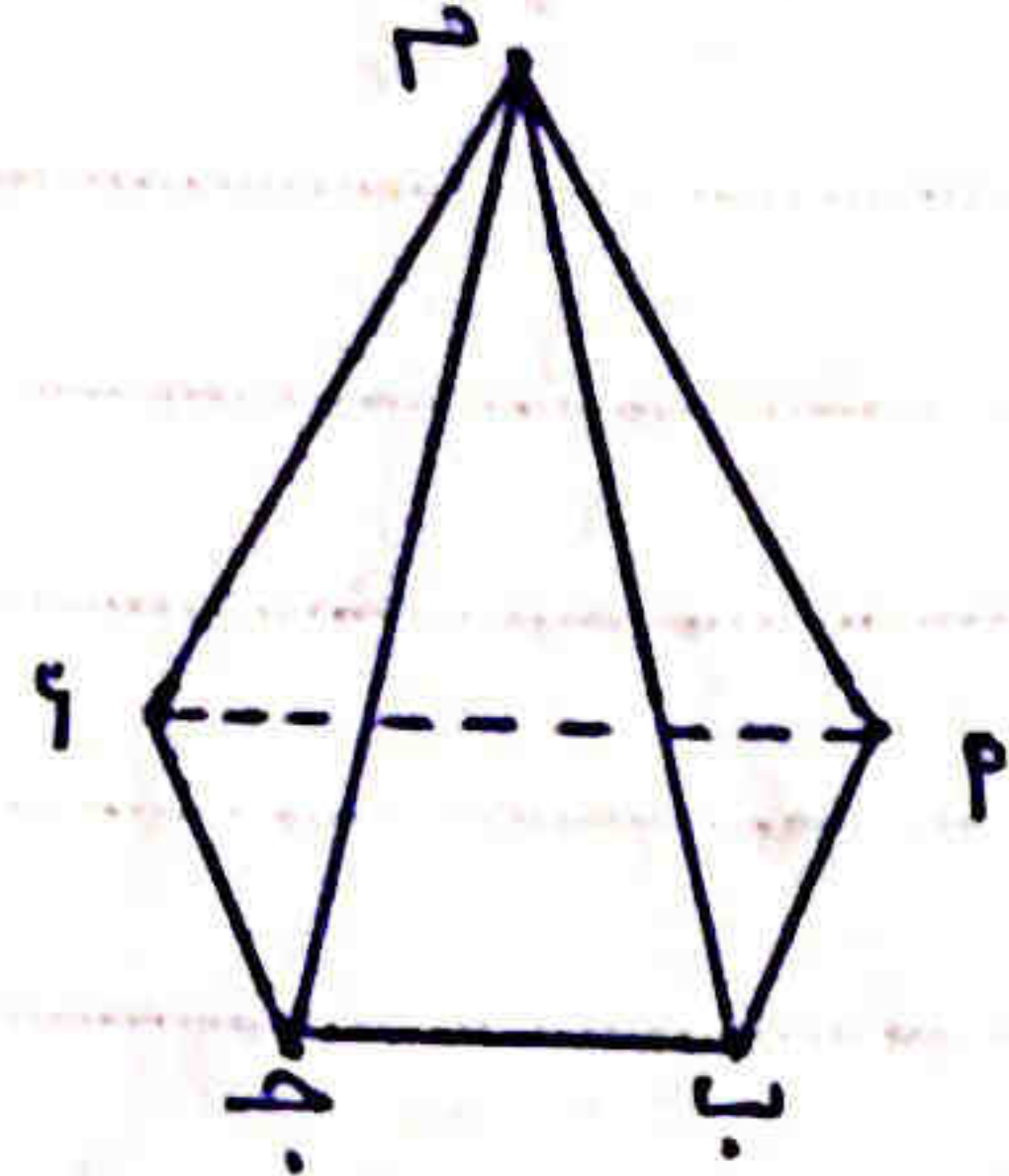
ل١ ∩ ل٢ ∩ ل٣ = {م}

▪ اذا تقاطع المستقيمان الحاملان لقطري الشكل الرباعي في نقطة فان أضلاعه تقع جميعاً في مستوى واحد.

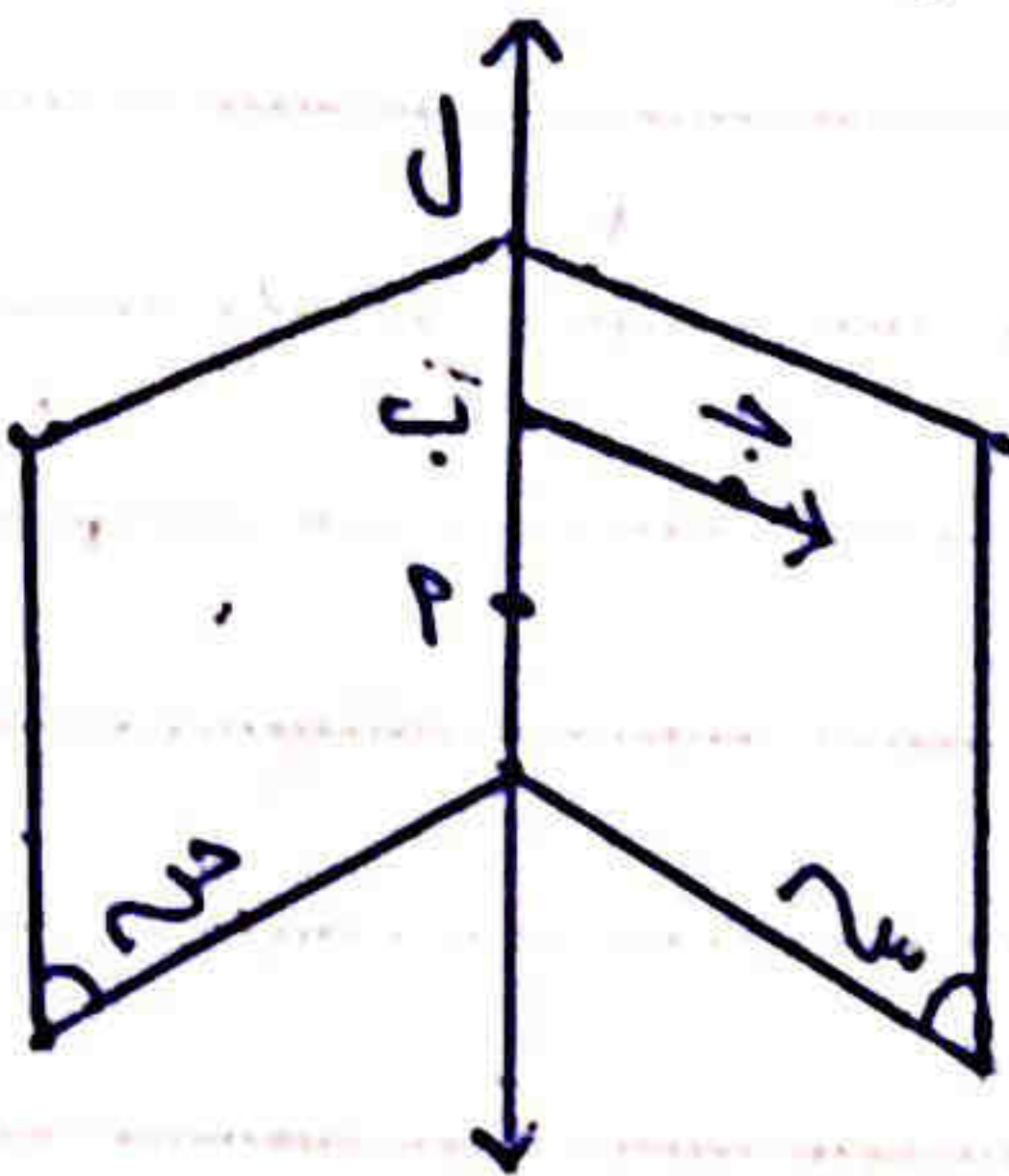
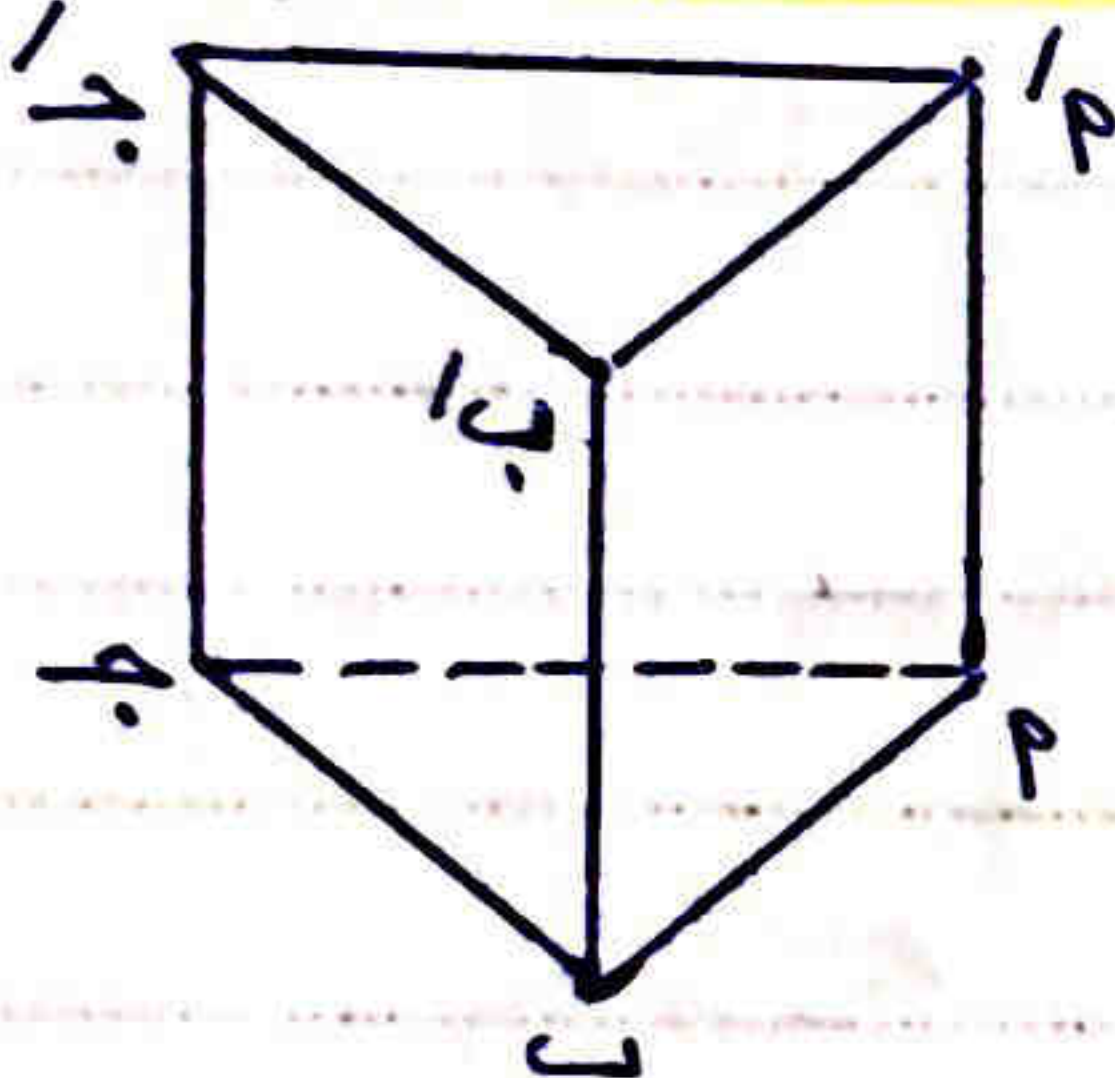
▪ المستقيمات الرأسية في الفراغ كلها متوازية. ولكن ليس من الضروري أن تكون المستقيمات الأفقية كلها متوازية.

▪ اذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فانهما يكونان منطبقان.

▪ اذا اشترك مستويان في مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه فانهما يكونان منطبقان.

▪ اذا اشترك مستويان في مستقيمان متقاطعان فانهما يكونان منطبقان، وكذلك اذا اشتركا في مستقيمان متوازيان فانهما يكونان منطبقان،

Scanned with CamScanner

① أكمل باستخدام الشكل التالي :

- عدد المستقيمات التي تحمل أحرف الشكل ......
- المستقيمات التي تحمل الأحرف وتمر بالنقطة م هي ....
- عدد المستويات التي تحمل أوجه الشكل ....

② أكمل بـ ∈ أو ∉ أو ⊂ أو ⊄

- ل ...... س
- ل ...... ص
- م ...... س
- ج ...... ص
- $\overleftrightarrow{بج}$ ...... س
- $\overleftrightarrow{بج}$ ...... ص

③ أكمل باستخدام الشكل التالي :

- المستوى م ب ب' م' ∩ ب ج ج' ب' يساوي ....
- المستوى م ب ج ∩ المستوى م' ب' ج' يساوي ....
- $\overleftrightarrow{مج}$ ∩ $\overleftrightarrow{م'ج'}$ = ...
- $\overleftrightarrow{بب'}$ ∩ المستوى م ب ج = ...

Scanned with CamScanner

④ تأمل الشكل التالي ثم أكمل

- اكتب ثلاث مستقيمات تمر بالنقطة أ

- اكتب المستقيمات التي تمر بالنقطتين أ ، ب معاً

- اكتب ثلاث مستويات تمر بالنقطة أ

- اكتب ثلاث مستويات تمر بالنقطتين أ ، ب معاً

- المستويان أ ب د' ، أ د د' أ' متقاطعان في .... [فكرة حلوة جداً]
(بُص كمل المستوى أ ب د' ليصبح أ ب د' د' وبعدين اشتغل عادي أ ب د' د' ∩ أ د د' أ')

- المستوى ب جـ د' ب' // المستوى........

- المستوى د جـ د' د' ∩ المستوى أ ب جـ د ∩ المستوى أ د د' أ' يساوي........

⑤ اختر الإجابة الصحيحة :

- جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا........
(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه
(ب) مستقيمان متوازيان
(جـ) مستقيمان متقاطعان
(د) مستقيمان متخالفان .

- عدد المستويات التي تمر بنقطة معلومة
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) لا نهائي

- عدد المستقيمات التي تمر بنقطتين معلومتين
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) لا نهائي

- إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س =........
(أ) ∅ (ب) ل
(جـ) س (د) {أ}

Scanned with CamScanner

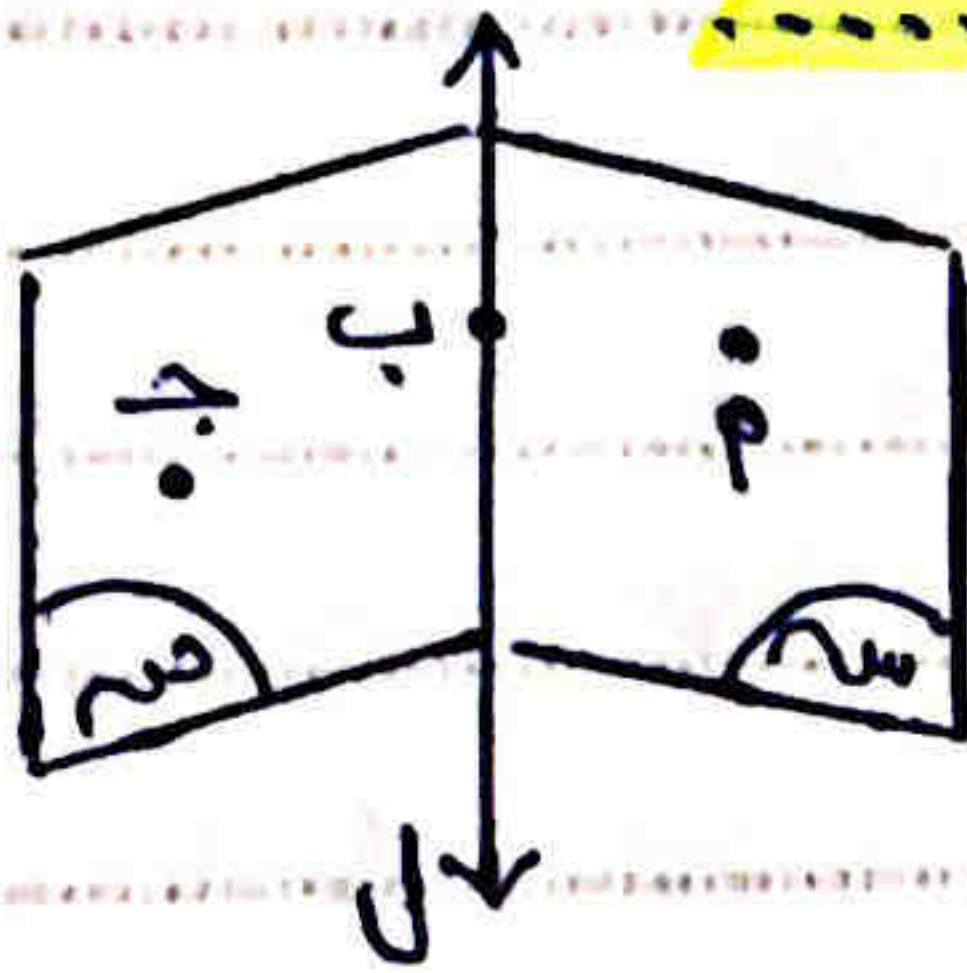
▪ اذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، م ∈ س فإن ل ∩ س = ...

(أ) ϕ (ب) ل

(جـ) س (د) {م}

▪ المستقيمات الرأسية في الفراغ تكون ....

(أ) متوازية (ب) متخالفة

(جـ) يجمعها مستوى واحد (د) متقاطعة

▪ أقل عدد من المستويات التي يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

▪ اذا كانت م ، ب ، جـ ثلاث نقط يحتويها مستوى فإن ....

(أ) م ب = ب جـ = م جـ

(ب) م ب + ب جـ = م جـ

(جـ) م ب + ب جـ > م جـ

(د) م ب + ب جـ < م جـ

▪ المستقيمان المتخالفان ....

(أ) يقعان في نفس المستوى

(ب) يتقاطعان

(جـ) يقعان في مستويان مختلفان

(د) متوازيان

▪ المستوى س ∩ المستوى ص يساوي ....

ل، ب، جـ، م، س، ص

(أ) {ب} (ب) ϕ

(جـ) المستقيم ل (د) {م ، ب ، جـ}

▪ اذا كان المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفان فإن $ل_1 \cap ل_2$ = ...

(أ) ϕ (ب) $ل_1$

(جـ) $ل_2$ (د) المستوى الذي يجمعهما

▪ أي الجمل الآتية غير صحيحة :

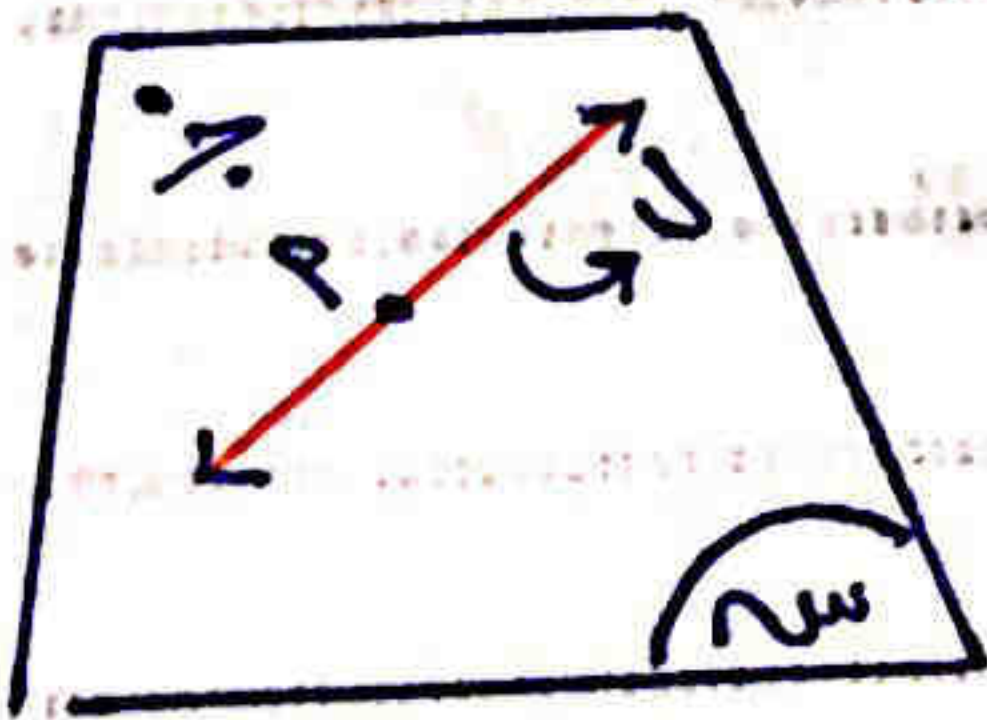
جـ، م، ل، س

(أ) ل ⊂ س

(ب) م ∈ ل ، م ∉ س

(جـ) جـ ∈ س ، جـ ∉ ل

(د) $\overleftrightarrow{م جـ} \cap ل = \{م\}$

Scanned with CamScanner

- يتقاطع المستويان اذا اشتركا في ......

(أ) نقطة واحدة (ب) نقطتان

(جـ) ثلاث نقاط على استقامة واحدة

(د) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

- أي الجمل الآتية غير صحيحة ؟ حيث $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ، س ، ص مستويان؟

(أ) اذا كان : $ل_١ \cap ل_٢ = \phi$ فإن $ل_١ \parallel ل_٢$ أو $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفان.

(ب) اذا كان : $ل_١ \cap س = \phi$ فإن $ل_١ \parallel س$

(جـ) اذا كان : $ل_٢ \cap س = ل_٢$ فإن $ل_٢ \subset س$

(د) اذا كان : $ل_٢ \subset ص$ فإن $ل_٢ \cap ص = \phi$

- المستويان غير المتوازيين يتقاطعان في ......

(أ) نقطة (ب) خط مستقيم

(جـ) مستوى (د) شعاع

- اذا كانت م نقطة لا تنتمي للمستوى الذي يضم النقط أ ، ب ، جـ فإن المستقيم $\overleftrightarrow{مأ}$ ......

(أ) يقع بأكمله داخل المستوى

(ب) يقطع المستوى في نقطة

(جـ) يقطع المستوى في نقطتين

(د) يوازي المستوى.

- اذا كانت س ، ص ، ع مستويات في الفراغ بحيث : $س \cap ص \cap ع = \{أ\}$ ، $س \cap ص =$ المستقيم $ل_١$ أي الجمل الآتية غير صحيح ؟

(أ) $أ \in ل_١$ (ب) $ل_١ \cap ع = \{أ\}$

(جـ) $ل_١ \parallel ع$ (د) $أ \in ع$

- اذا اشترك المستقيم والمستوى في نقطتين فإن المستقيم ......

(أ) يوازي المستوى

(ب) يقطع المستوى في نقطة وحيدة

(جـ) يقع بأكمله داخل المستوى.

(د) يقطع المستوى في نقطتين فقط.

- أي الجمل الآتية غير صحيحة:

(أ) أي مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستوياً.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان في نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد

(د) أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

Scanned with CamScanner

٦) في الشكل التالي :

أ ب ب' أ' ، ب ب' ح' ج ، أ ج ج' أ'

ثلاث مستطيلات متقاطعة مثنى مثنى ومتطابقة ، م منتصف ح ج'

فإذا كان :

أ ب = ٥ سم ، أ أ' = ١٠ سم

أكمل :

- المستوى أ م أ' ∩ المستوى ب م ب' يساوي ....
- المستوى أ م ب ∩ المستوى أ ب ج يساوي ....
- المستوى أ م ب ∩ المستوى ب ج ح' ب' يساوي ....

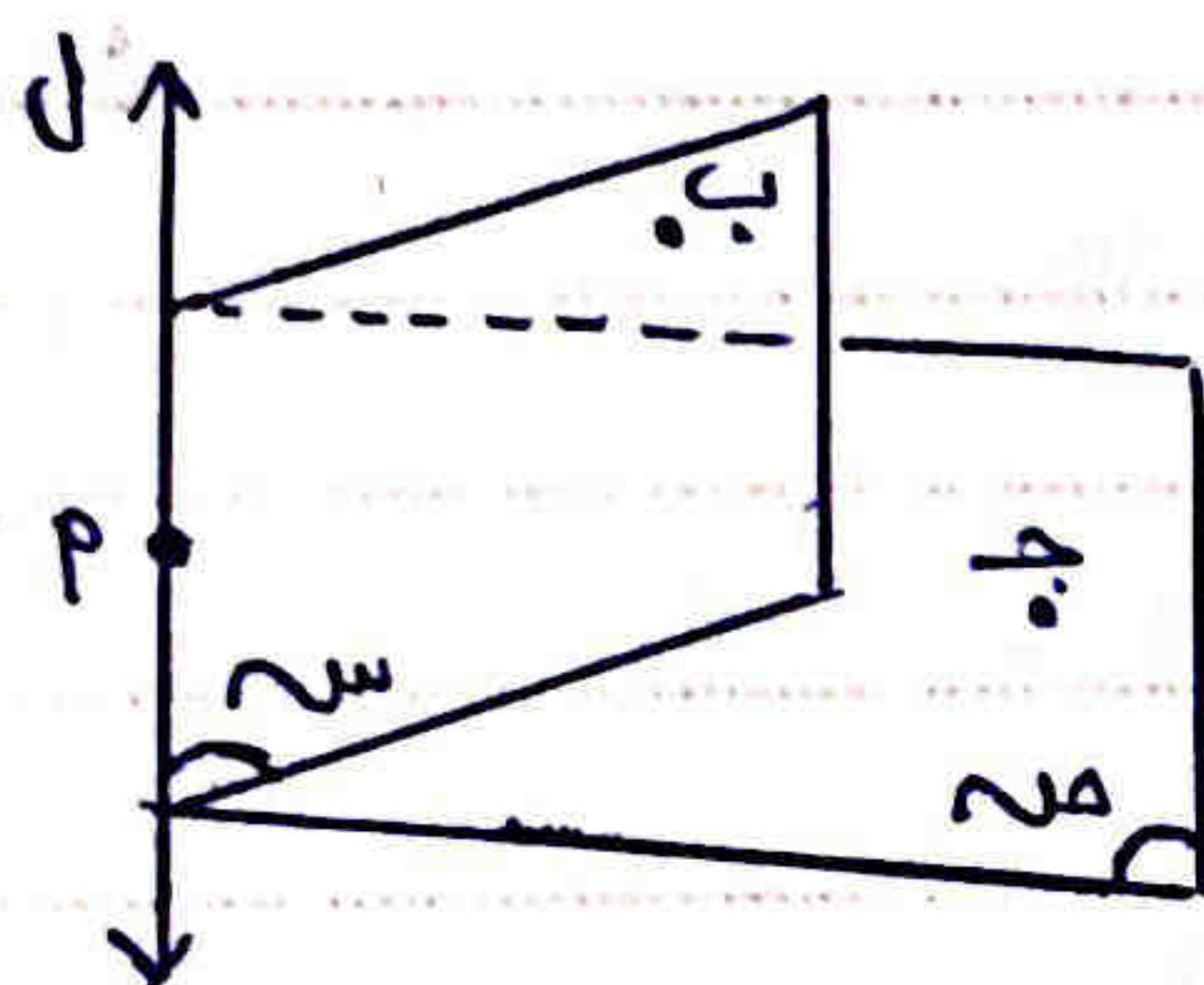
- ق (د ب م ب') = ...

الحل

٧) في الشكل التالي :

س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم ل ، أ ∈ ل ، ب ∈ س ، ب ∉ ص ، ج ∈ ص ، ج ∉ س أكمل ما يأتي

- المستوى س ∩ المستوى أ ب ج يساوي ....
- المستوى ص ∩ المستوى أ ب ج يساوي ....
- المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب ج = ...

Scanned with CamScanner

٨ تأمل الشكل التالي ثم أكمل:

- المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب جـ يساوي ......
- المستوى م ب جـ ∩ المستوى أ ب جـ يساوي ......
- $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ∩ المستوى أ ب جـ = ...
- المستوى م أ ب ∩ المستوى م ب جـ ∩ المستوى م أ جـ = ...

٩ في الشكل الموضح: أ ∉ المستوى ب جـ د أكمل يا معلم:

- س ∩ ص = ...
- س ∩ ع = ...
- ص ∩ ع = ...
- $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ س = ...
- $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ...... س ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ...... ع
- بفرض أن: ق(∠ب جـ د) = ٩٠°، ب جـ = ٣سم ، جـ د = ٤سم فإن: ب د = ... سم

الحل

Scanned with CamScanner

(١٠) اذكر عدد المستويات التي تمر بكل من :

- نقطة واحدة معلومة
- نقطتين مختلفتين
- ثلاث نقاط على استقامة واحدة.
- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

(١١) في الشكل التالي :

أ ب جـ ء أ' ب' جـ' ء' مكعب طول حرفه ٦ سم

(أ) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستقيمات الآتية :

- أب ، ء ء'
- أب ، ء جـ'
- أب ، أ' ء
- أجـ ، أ' جـ'
- أب ، ء جـ
- أجـ ، أ أ'

(ب) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستويات الآتية :

- أ ب ب' أ' ، ء جـ جـ' ء'
- أ' ب' ب أ ، أ' ب' جـ' ء'
- أ ب جـ ، ء' ب' ء

(جـ) اذا علمت أن : أب ⊥ أء' فأوجد طول ب ء'

(١٢) أكمل يا برنس :

(أ) اذا كان المستقيم ل ∩ المستوى س يساوي {أ} فإن ل ...... للمستوى س

(ب) اذا كان المستقيم ل ∩ المستوى س يساوي {أ ، ب} فإن ل ....

(١٣) س ، ص ، ع ثلاث مستويات حيث س ∩ ص ∩ ع = {أ} ، س ∩ ص = ل حيث ل يمثل مستقيم فأي من الاختيارات الآتية غير صحيح :

- أ ∈ ل
- ل ∩ ع = {أ}
- ل // ع
- أ ∈ ع

Scanned with CamScanner

** الإجابات **

① ■ ٨ أحرف

■ عدد = ٣ وهي: $\overleftrightarrow{مب}$ ، $\overleftrightarrow{مء}$ ، $\overleftrightarrow{مم}$

■ ٥ مستويات [٤ جوانب + قاعدة]

② ■ ⊂

■ ⊂

■ ∈

■ ∉

■ ⊂

■ ⊄

وتنساش النقطة (∈ ، ∉) بينما المستقيم (⊂ ، ⊄)

③ ■ $\overleftrightarrow{بب'}$

■ ϕ

■ ϕ

■ {ب}

④ ■ $\overleftrightarrow{مب}$ ، $\overleftrightarrow{مم'}$ ، $\overleftrightarrow{مء}$

■ $\overleftrightarrow{مب}$

■ م ب ب' م' ، م ب حـ ء ، م ء ء' م'

■ م ب ب' م' ، م ب حـ ء ، م ب حـ' ء'

■ $\overleftrightarrow{مء'}$

■ م ء ء' م'

■ {ء}

⑤ بالترتيب كما يلي:

■ (ء)

■ عدد لانهائي (ء)

■ (ب) ١

■ (م) ϕ

■ (ب) ل

■ (م) متوازية

■ (ء) ٤

■ (حـ) لأن مجموع أصغر ضلعين لازم يكون أكبر من الثالث ودا شرط المثلث.

■ (حـ) يقعان في مستويان مختلفان

■ (جـ) المستقيم ل

■ (م) ϕ

■ (ب) م ∈ ل ، م ∉ س

■ (ء) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

■ (ء) اذا كانت ل ⊂ س فإن ل ∩ س = ϕ

■ (ب) خط مستقيم

■ (ب) يقطع المستوى في نقطة

■ (جـ) ل // ع

■ (جـ) يقع بأكمله داخل المستوى

■ (ء) أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

Scanned with CamScanner

٦ ■ $\overleftrightarrow{\text{حـ حـ'}}$

المكونات تقاطع المستويات الحاويات لكل من م ، م' هو م حـ حـ' م' و الحاوي لـ ب ، ب' هو ب حـ حـ' ب'

∴ المستوى م حـ حـ' م' ∩ المستوى ب جـ جـ' ب' يساوي $\overleftrightarrow{\text{حـ حـ'}}$ #

■ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

■ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

■

حـ' ب'
٥
ء ١٠
٥
جـ ٥ ب

من فيثاغورث

ب ء = $\sqrt{٢٥+٢٥}$ = ٥$\sqrt{٢}$

بالمثل ب' ء = ٥$\sqrt{٢}$

△ ب ء ب' فيه

(ب ء)^2 + (ب' ء)^2 = ٥٠ + ٥٠ = ١٠٠

(ب ب')^2 = ١٠٠

∴ (ب ب')^2 = (ب ء)^2 + (ب' ء)^2

∴ ق(∠ ب ء ب') = ٩٠° #

٧ ■ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

■ $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$

■ {م}

٨ ■ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

■ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

■ {ب}

■ {م}

٩ ■ $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$

■ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

■ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

■ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

■ ⊂ ، ⊂

■ من فيثاغورث يا معلم

جـ
٤ ٣
ء ب

ب ء = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥ سم

Scanned with CamScanner

(١٠)
- عدد لانهائي
- عدد لانهائي
- عدد لانهائي
- مستوى وحيد

(١١) (أ)
- متخالفان
- متوازيان
- متخالفان
- متوازيان
- متخالفان
- متعامدان

(ب)
- متوازيان
- متعامدان من الحروف
- متعامدان

لذلك لو كملت المستوى الأول

أ ب جـ ء ∩ ء أ' ب' ء' = {ء}

(جـ)

- أ ء' (قطر المكعب) = طول الحرف × $\sqrt{3}$

∴ أ ء' = $6\sqrt{3}$

∴ ب ء' = $\sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (6)^2}$ = $6\sqrt{4}$ سم

(١٢) (أ) قاطع

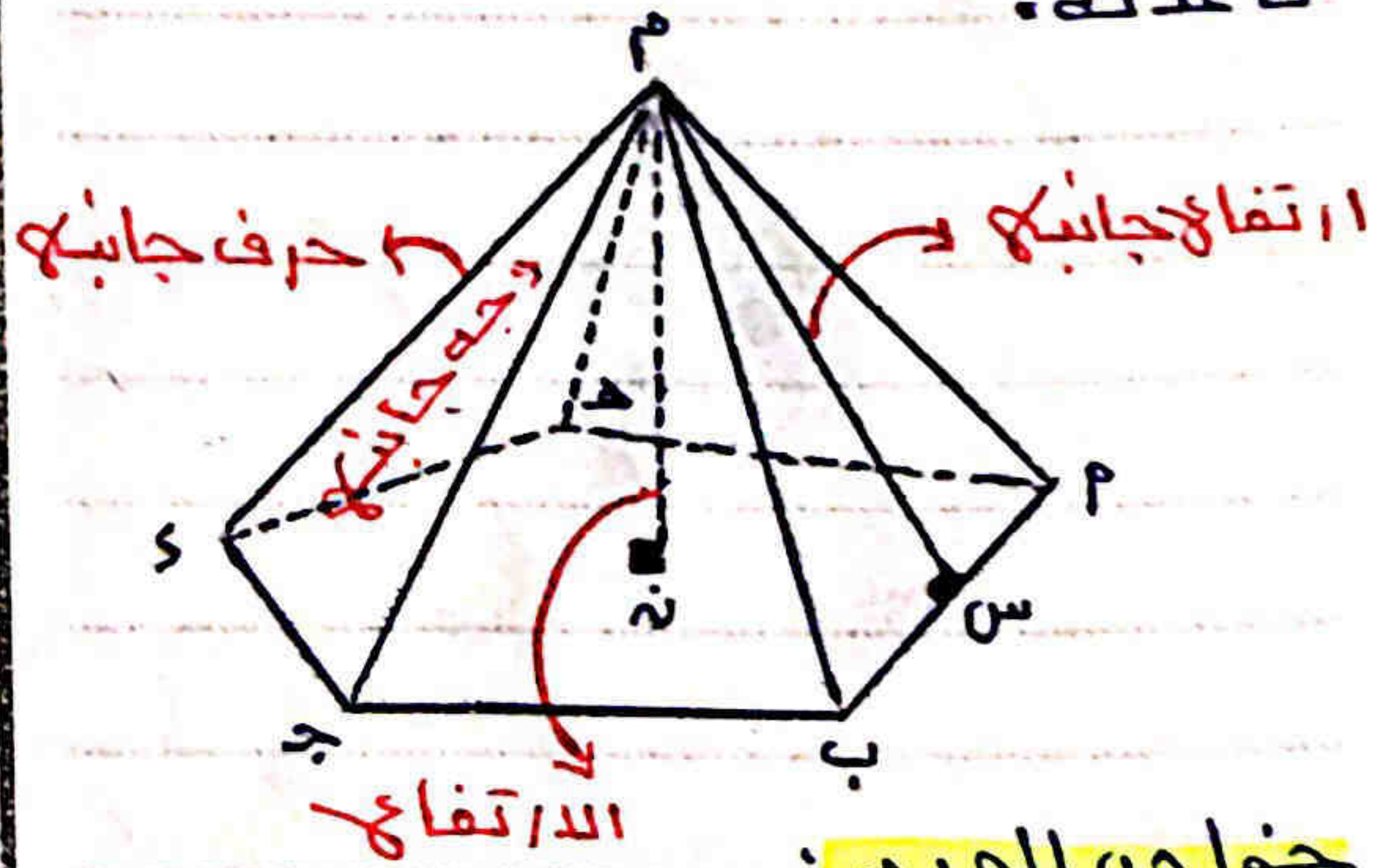
(ب) يقع بأكمله داخل المستوى س

(١٣)
- ل // ع

للتوضيح

Scanned with CamScanner

② الهرم :

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك في رأس واحدة لاتنتمي الى هذه القاعدة ويسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته.

خواص الهرم :

- الأوجه الجانبية للهرم سطوح مثلثات عددها يساوي عدد أضلاع القاعدة.

- **ارتفاع الهرم :**

هو العمود الساقط من رأس الهرم على مستوى قاعدته

- **ارتفاع الهرم الجانبي :**

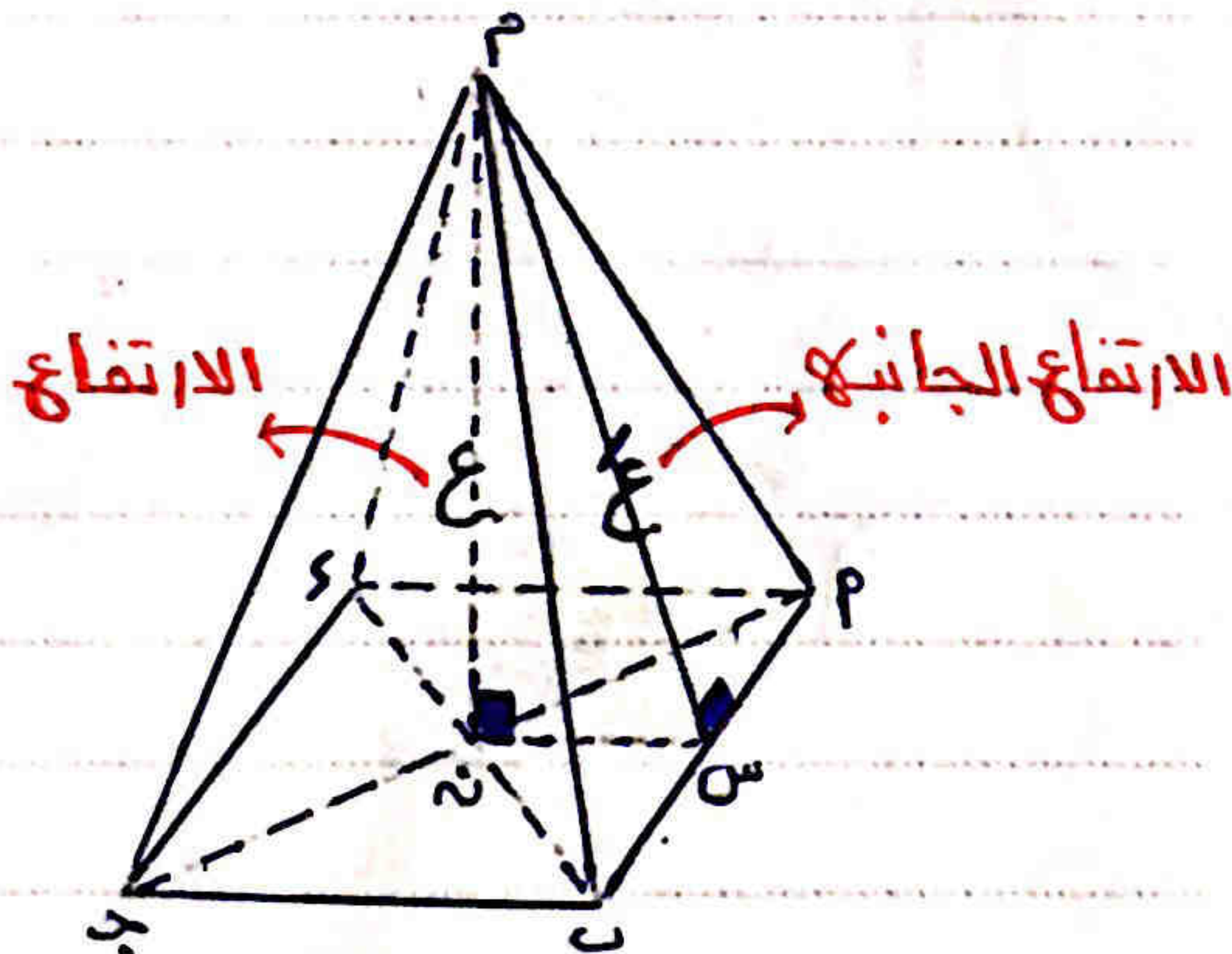
هو العمود الساقط من رأس الهرم على ضلع من أضلاع قاعدة الهرم.

← **على سبيل المثال :**

- م أ ب وجه جانبي (مثلث)
- $\overline{م أ}$ حرف جانبي
- $\overline{م س}$ ارتفاع جانبي
- $\overline{م ن}$ ارتفاع الهرم
- المضلع الخماسي (أ ب جـ ء هـ) قاعدة الهرم.

← **حالات خاصة من الهرم :**

(أ) الهرم القائم :

يكون الهرم قائماً اذا كان العمود المرسوم من الرأس على القاعدة يمر بمركزها الهندسي.

∵ ن هي المركز الهندسي للقاعدة أ ب جـ ء

∵ $\overline{م ن}$ عمودي على مستوى القاعدة أ ب جـ ء

∴ الهرم (م أ ب جـ ء) هرماً "قائماً".

Scanned with CamScanner

(ب) الهرم المنتظم:

هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم.

■ خصائص الهرم المنتظم:

← أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.

← أحرفه الجانبية متساوية في الطول.

← ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول.

(جـ) الهرم الثلاثي منتظم الوجوه:

هو هرماً ثلاثياً جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع حيث يمكن اعتبار أي منها قاعدة للهرم.

ملاحظات هامة جداً "جداً":

← **المضلع المنتظم فيه:**

- الأضلاع متطابقة (متساوية في الطول)
- الزوايا متطابقة (متساوية في القياس)

← **المركز الهندسي لكل من:**

- المثلث هو نقطة تلاقي متوسطاته.
- متوازي الأضلاع والمربع والمستطيل والمعين هو نقطة تقاطع القطرين.

← كل هرم منتظم هو هرم قائم وليس من الضروري أن يكون كل هرم قائم منتظم.

← الهرم القائم ليس من الضروري أن تتساوى ارتفاعاته الجانبية أو أحرفه الجانبية.

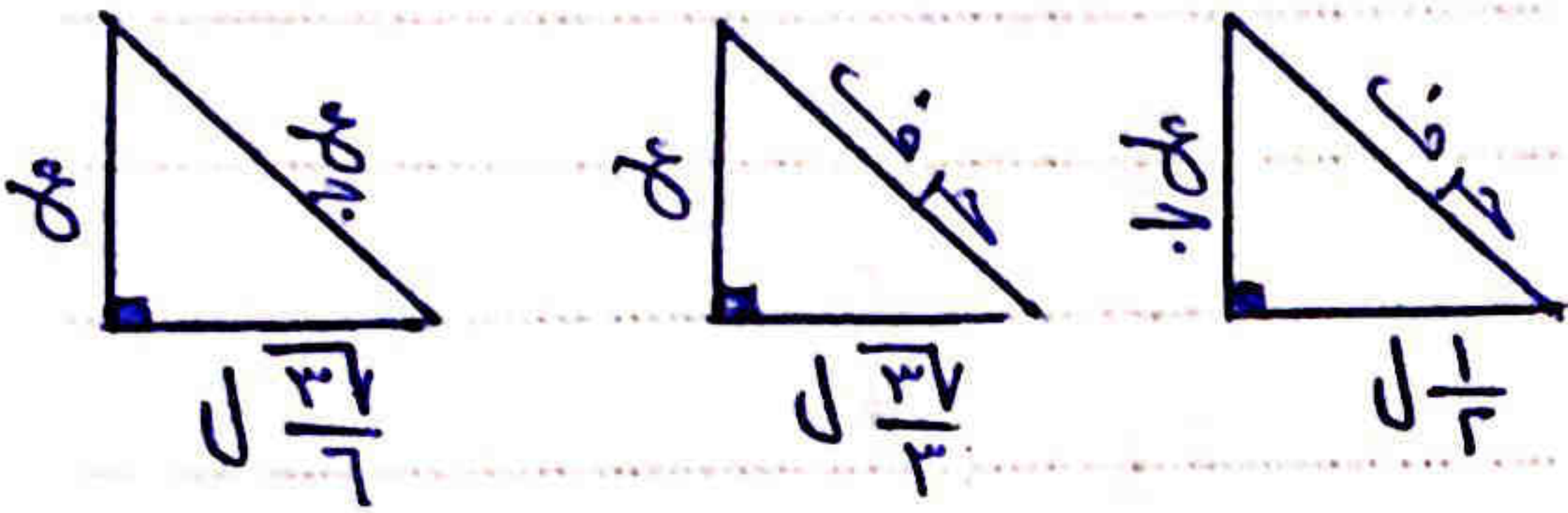
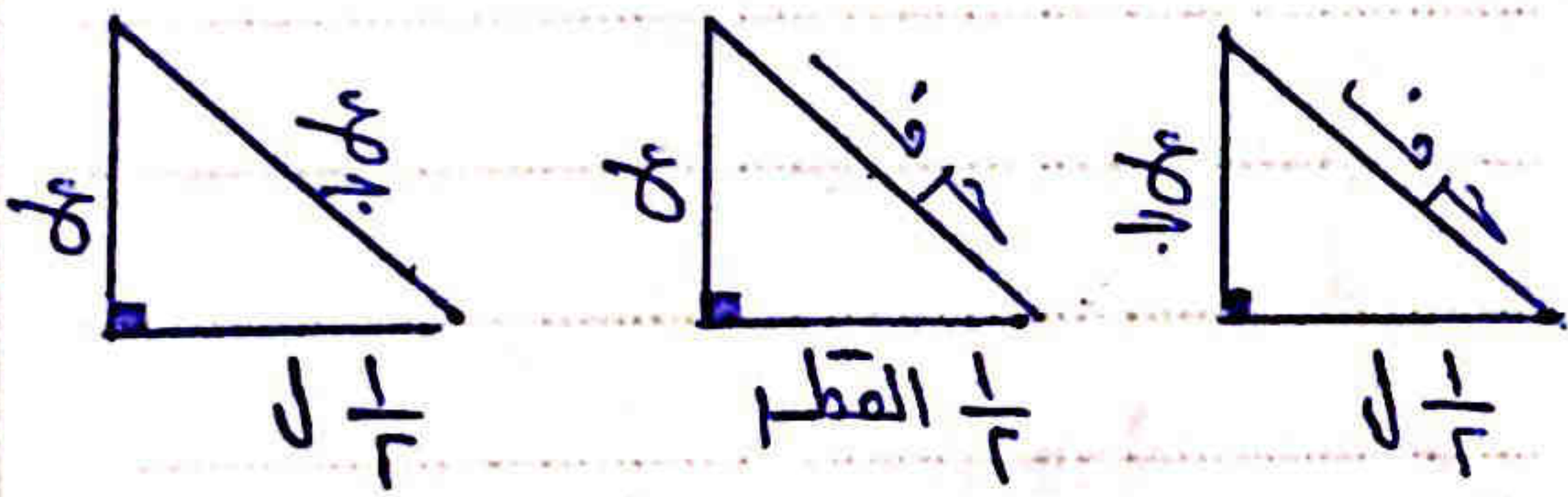
← المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على أي مستقيم في المستوى.

← اختصارات هامة جداً "جداً"

■ **الهرم الثلاثي المنتظم**

حرف ، ع ل ، $\frac{1}{2}$ ل

حرف ، ع ، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل

ع ل ، ع ، $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

■ **الهرم الرباعي المنتظم**

المربع (طول القطر = $\sqrt{2}$ × طول الضلع)

■ **الهرم السداسي المنتظم**

(ل ← طول ضلع القاعدة ، ع ل ← الارتفاع الجانبي)

Scanned with CamScanner

■ أهم القوانين :

← المساحة الجانبية والكلية للهرم المنتظم :

← الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × ع جـ

← الكلية = الجانبية + مساحة القاعدة

← الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ع

← الهرم الثلاثي منتظم الوجوه :

← ع جـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

← ع = $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ل

← المساحة الجانبية = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ل٢

← المساحة الكلية = $\sqrt{3}$ ل٢

← الحجم = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ل٣

← ٢ ل٢ = ٣ ع٢ (هامة جداً جداً)

ل ← طول الحرف

ع ← الارتفاع

ع جـ ← الارتفاع الجانبي

← مساحة سطح أي مضلع منتظم :

م = $\frac{ن}{4}$ س٢ ظتا ($\frac{180}{ن}$)

أو ممكن نحفظ أي علشان محدش يزعل

م = $\frac{ن}{4}$ س٢ ظا (٩٠ − $\frac{180}{ن}$)

ن ← عدد الأضلاع ، س ← طول الضلع

← مساحة المثلث :

م = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{1}{2}$ × أ × ب × جا جـ

م = $\sqrt{ح(ح-أ)(ح-ب)(ح-جـ)}$

ح ← تمثل نصف محيط المثلث

أ ، ب ، جـ ← أطوال أضلاع المثلث

← ركز لي في المربع :

← طول القطر = $\sqrt{2}$ × طول الضلع

∴ طول الضلع = طول القطر ÷ $\sqrt{2}$

■ قاعدة أويلر :

لأي مجسم قاعدته منتظمة مغلقة يكون :

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

مثال : الهرم الخماسي :

عدد الرؤوس = عدد الأوجه = ٦

فيكون عدد الأحرف = ١٢ − ٢ = ١٠ #

Scanned with CamScanner

تمارين محلولة

(١) اختر:

▪ أي الجمل الآتية صحيحة:

(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية

(د) أقل عدد من المستويات التي تحدد مجسم = ٣ مستويات

▪ أي الجمل الآتية غير صحيحة:

(أ) الهرم القائم يمكن أن تكون قاعدته سطح معين.

(ب) الهرم الثلاثي له ثلاثة أوجه.

(جـ) الهرم الخماسي له ستة أوجه.

(د) الهرم الرباعي جميع أوجهه الجانبية سطوح مثلثات.

▪ في الهرم السداسي يكون:

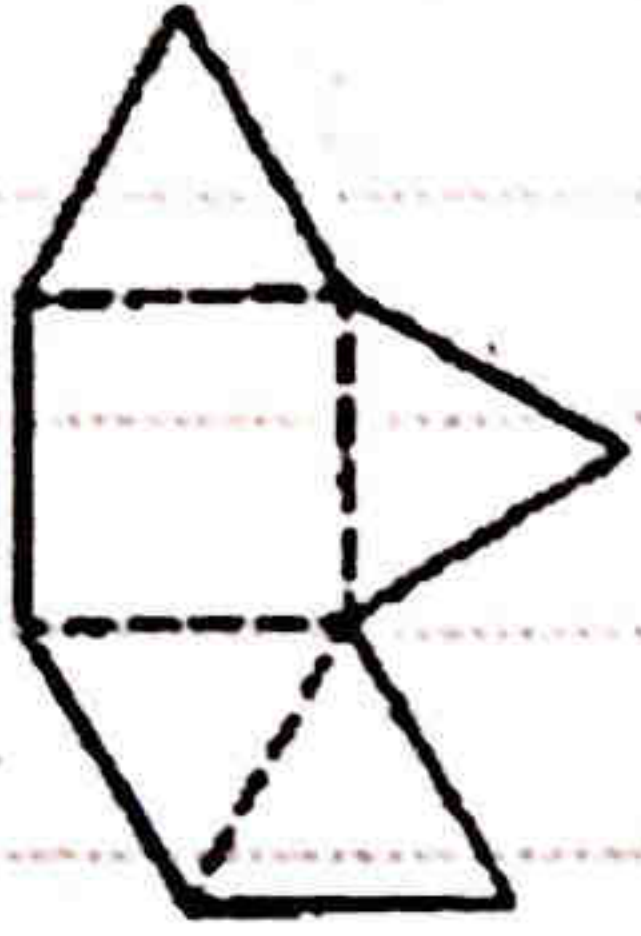
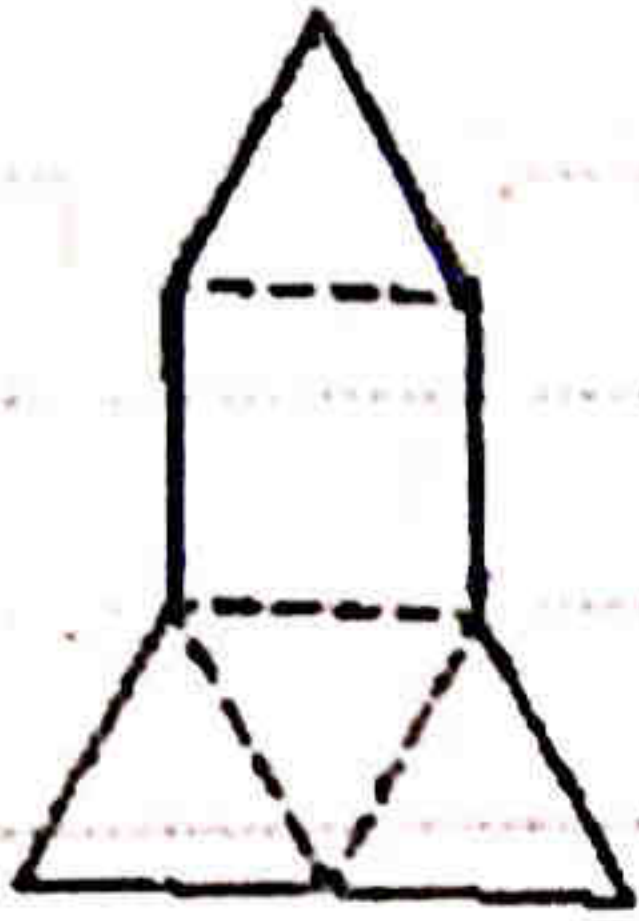
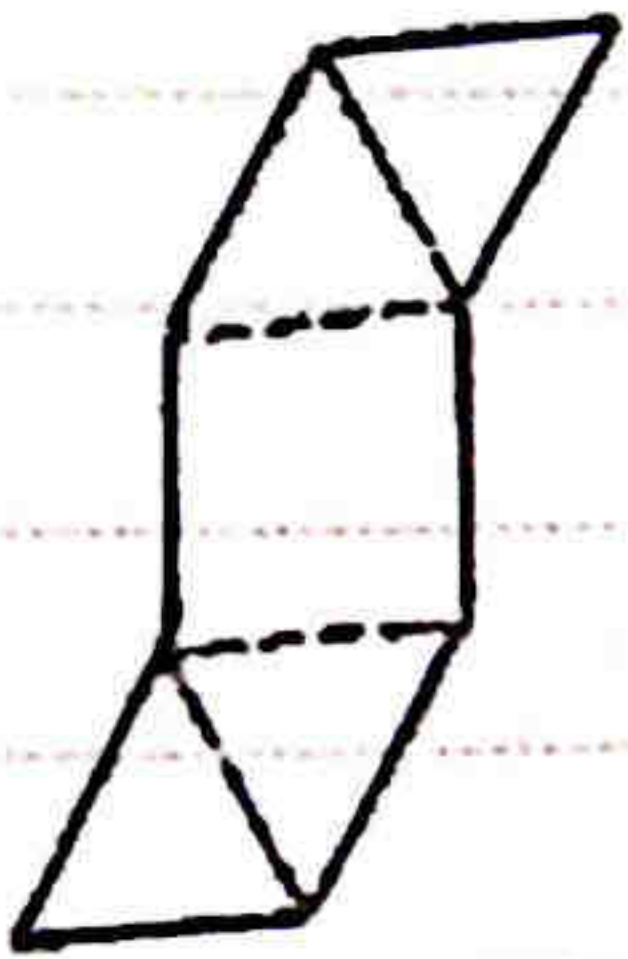
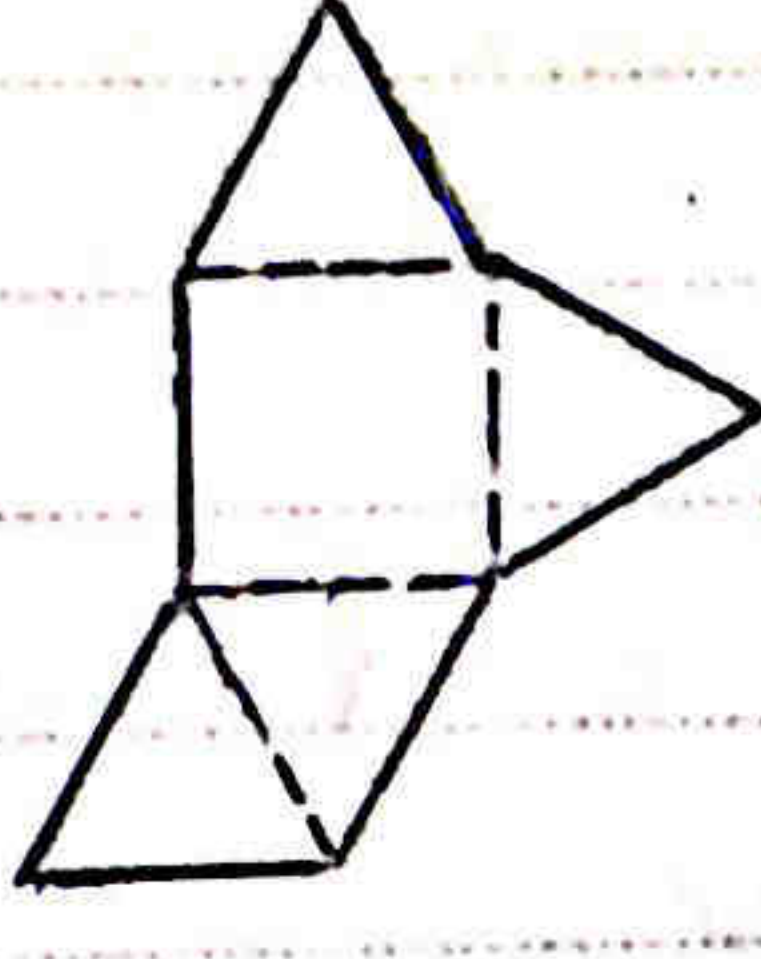
عدد الأوجه + عدد جميع رؤوسه - عدد أحرفه = ...

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

▪ أي الشبكات التالية لا تصنع هرما رباعيا "منتظما" عند طيها:

(أ) (ب)

(جـ) (د)

▪ أي المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة:

(أ) هرم رباعي

(ب) هرم رباعي منتظم

(جـ) هرم ثلاثي منتظم الوجوه

(د) غير ذلك

اعداد الاستاذ / عماد صلاح
معلم الرياضيات والاحصاء
01030252232

Scanned with CamScanner

② هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^٢ وارتفاعه الجانبي = ٥ سم فإن محيط قاعدته = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

الحل

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

٣٠ = $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × ٥

∴ محيط القاعدة = $\frac{٦٠}{٥}$ = ١٢ سم

③ أ ب جـ د أَ بَ جَـ دَ مكعب طول حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم بَ أ ب جـ = ... سم^٣

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٢١٨ سم^٣

الحل

الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٦ × ٦

= ٣٦ سم^٣

القاعدة مثلث علشان كدا قولنا $\frac{1}{2}$ × ٦ × ٦ فهمت يا حبيبي

④ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤

(جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

⑤ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي منتظم الوجوه : ارتفاعه = ...

الحل

٢ ل^٢ = ٣ ع^٢

ل $\sqrt{٢}$ = ع $\sqrt{٣}$

ل : ع = $\sqrt{٣}$: $\sqrt{٢}$ = $\sqrt{٦}$: ٢

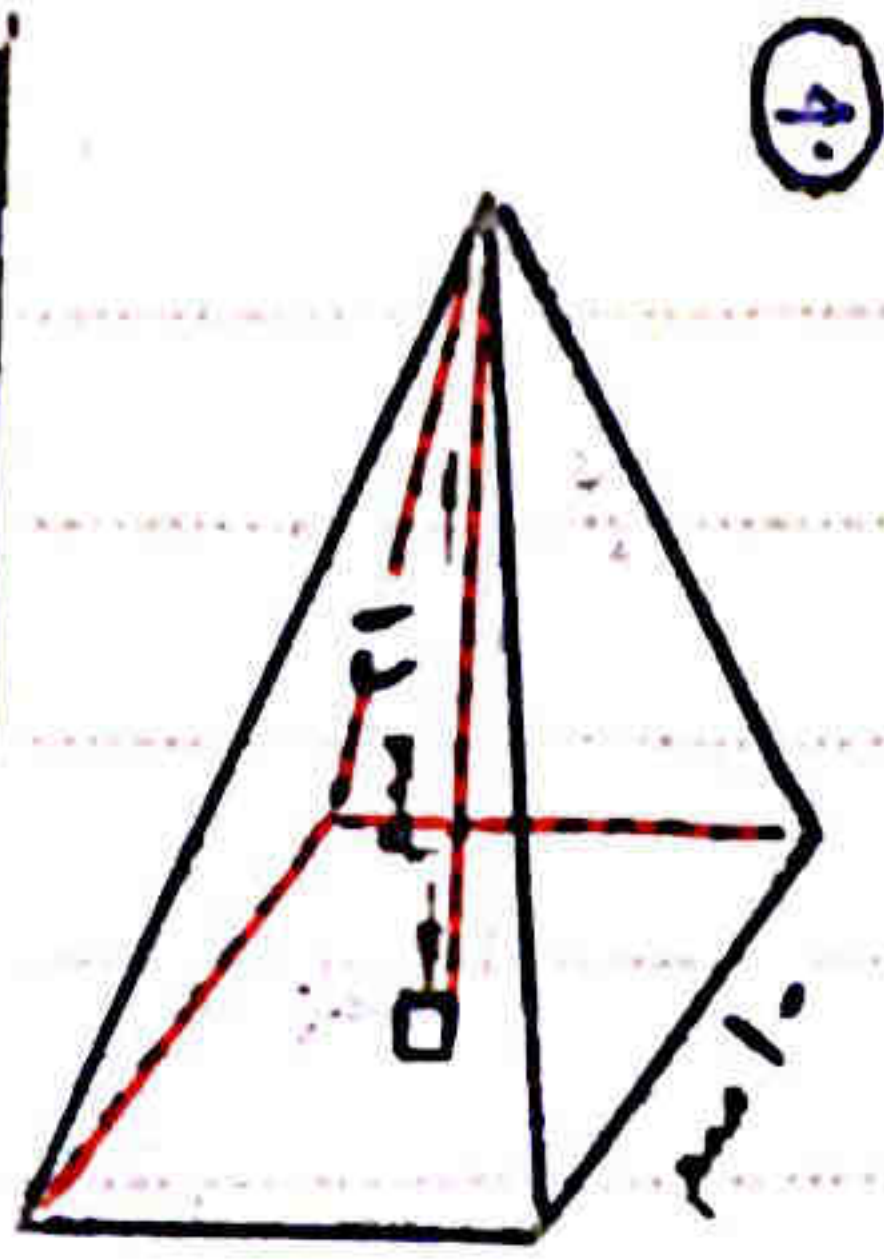
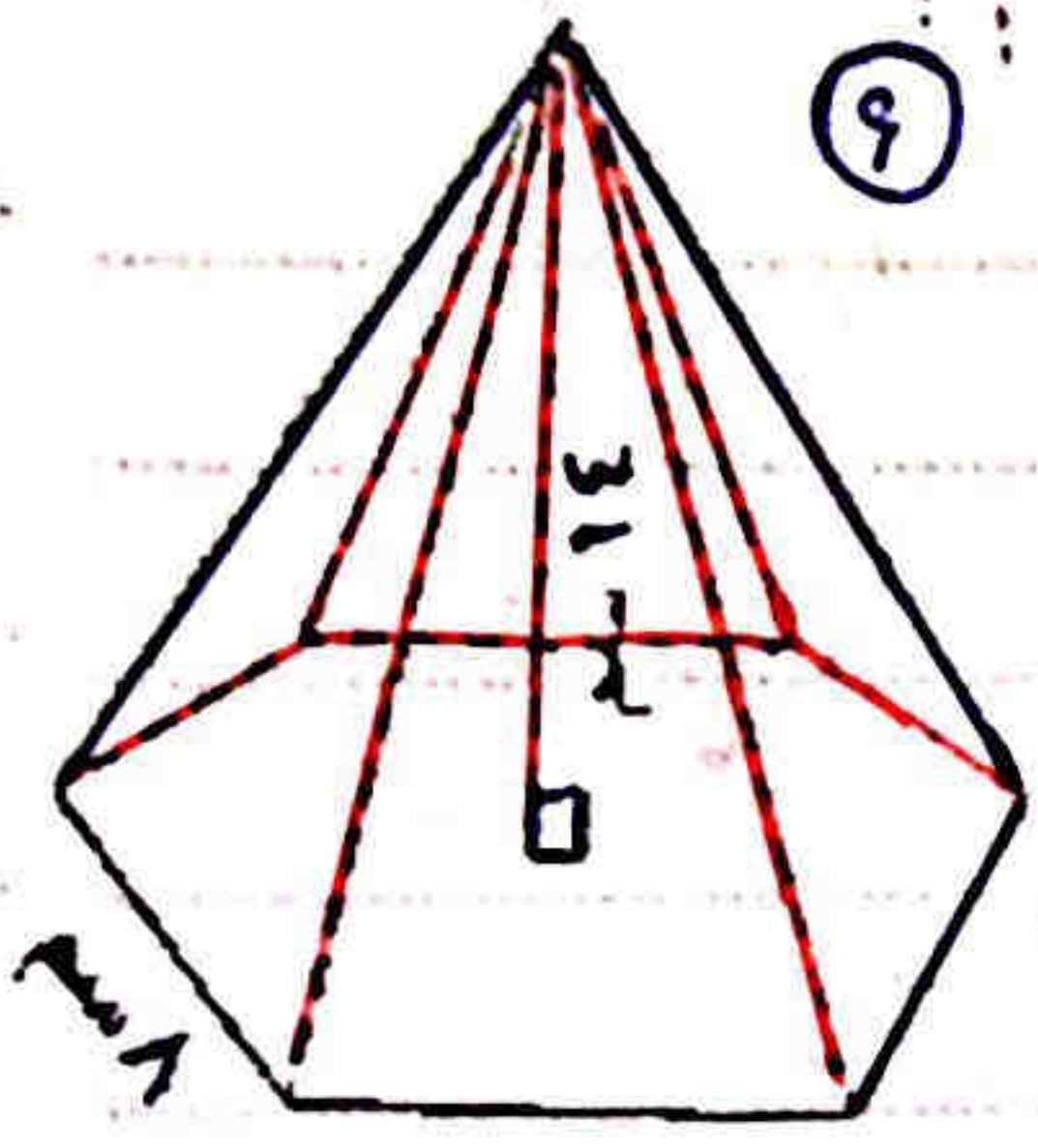
⑥ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن حجمه ......

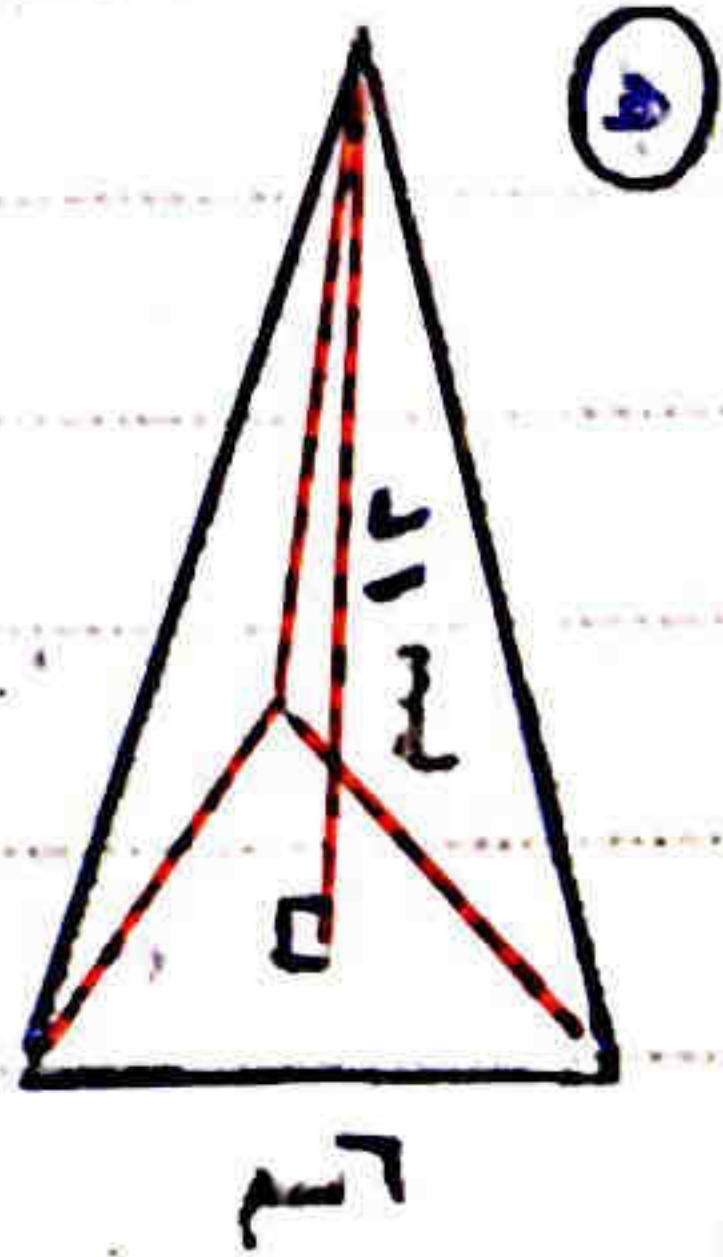
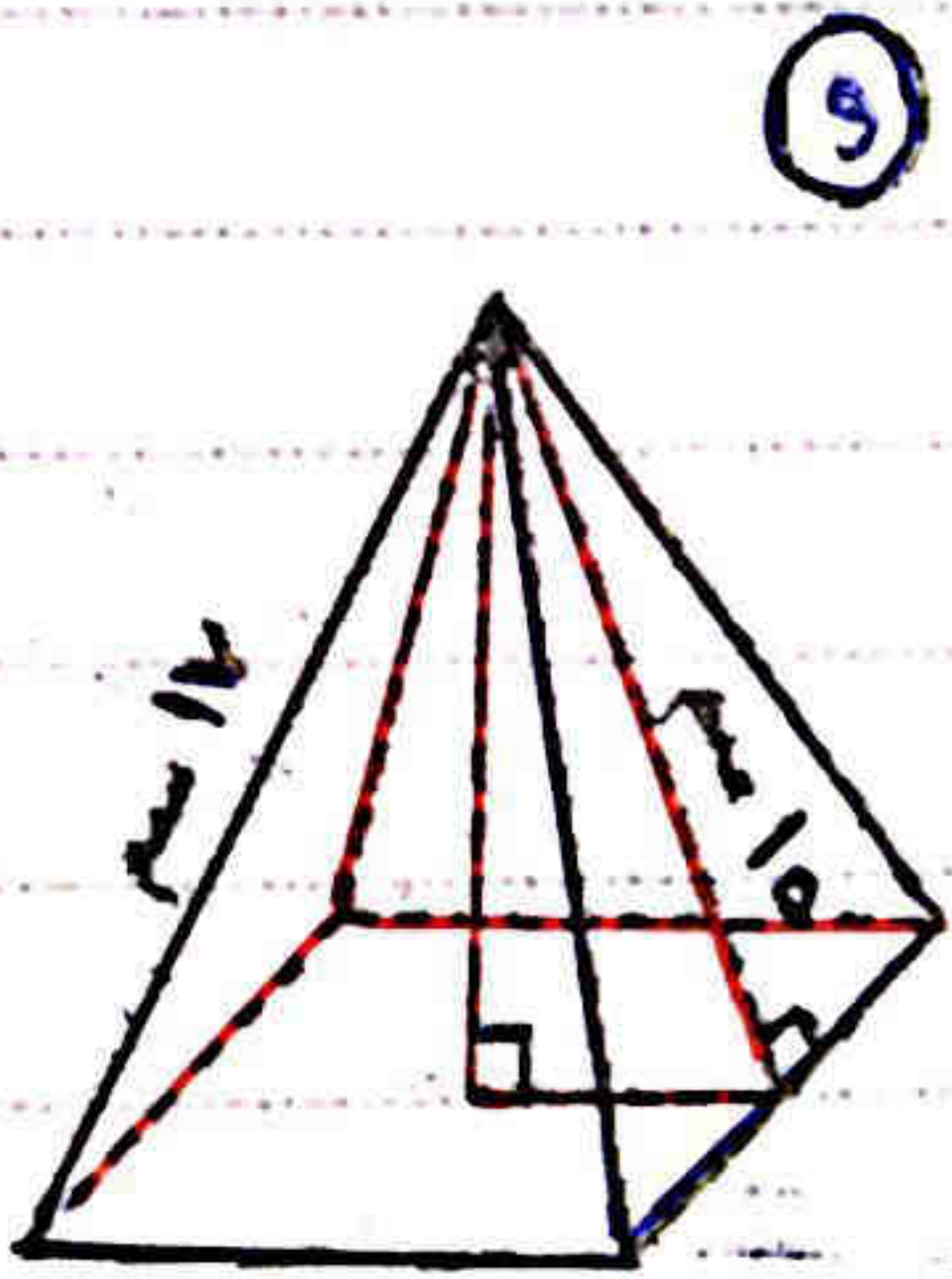
(أ) يتضاعف (ب) لا يتغير

(جـ) يتضاعف ٦ مرات (د) يتضاعف ٤ مرات

الحل

عند زيادة طول الضلع تبع القاعدة للضعف فإن المساحة تزداد أربعة أمثالها وكذلك الحجم يتضاعف ٤ مرات

Scanned with CamScanner

- اذا قطعنا هرم رباعي منتظم بمستوى يوازي قاعدته فان المقطع الحادث يكون ......

(أ) مثلث (ب) مربع
(جـ) مستطيل (د) دائرة

(٧) أوجد المساحة الجانبية والكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاه

(أ) (ب)

Scanned with CamScanner

⑧ في الهرم الخماسي المنتظم أكمل ما يأتي:

- عدد أوجهه الجانبية؟

الحل

٥

- عدد الأوجه؟

الحل

٥ + ١ = ٦

- عدد الأحرف الجانبية؟

الحل

٥

- عدد الرؤوس؟

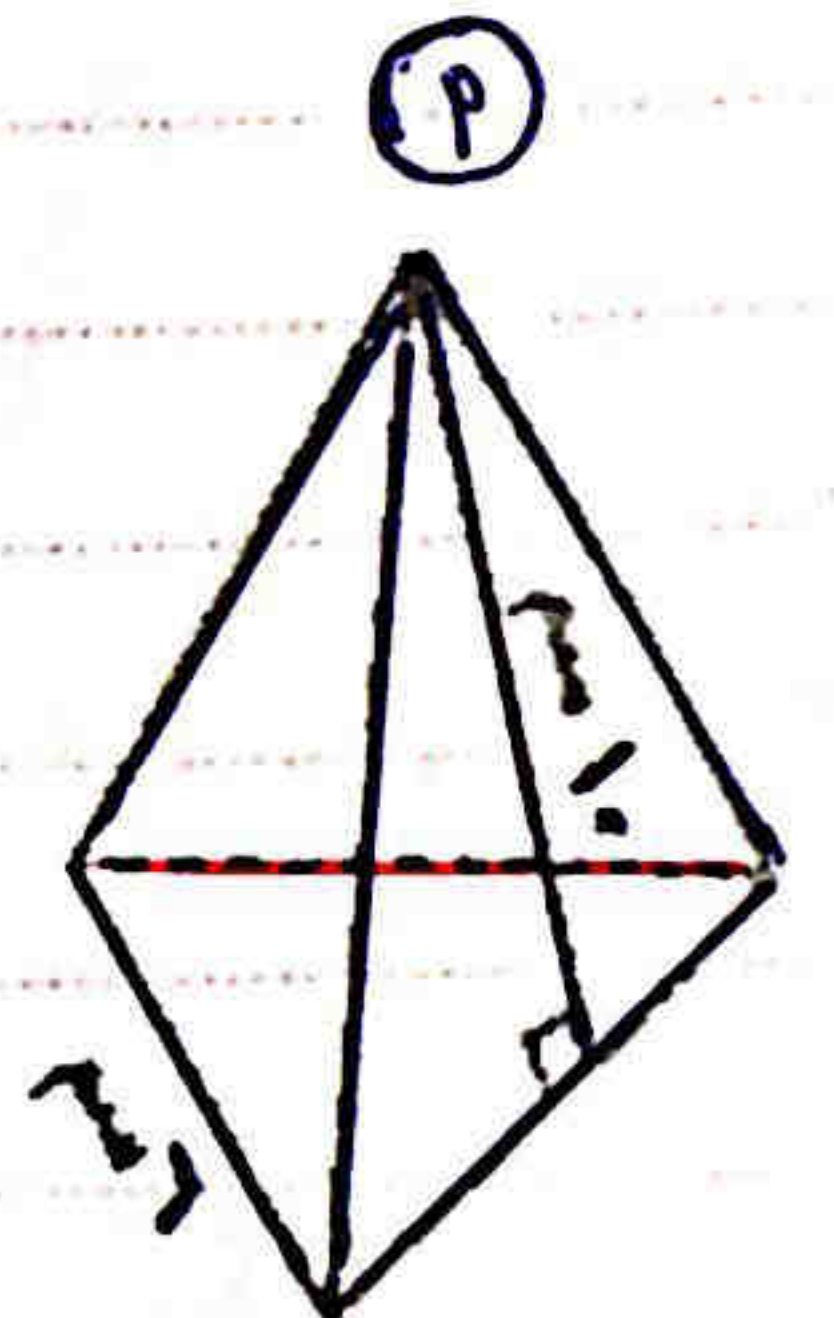
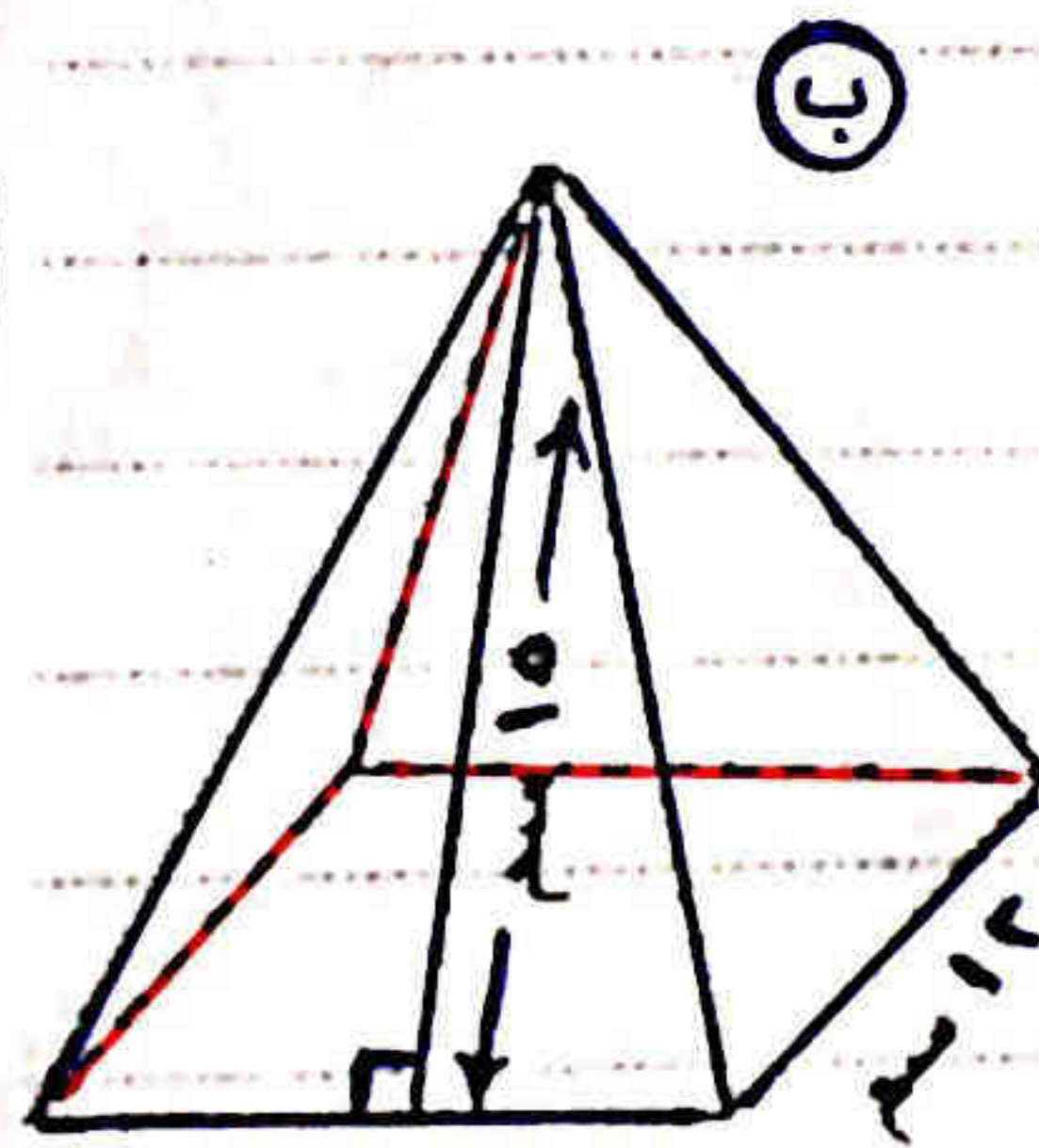
الحل

عدد الأوجه = عدد الرؤوس = ٦

- عدد الأحرف؟

من قاعدة أويلر:

عدد الأحرف = الرؤوس + الأوجه − ٢

= ٦ + ٦ − ٢ = ١٠

⑨ في الهرم المنتظم رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر:

أ) طول الحرف الجانبي

ب) الارتفاع (ع)

جـ) الارتفاع الجانبي (عَ)

الحل

ع ثم عَ ثم الحرف الجانبي

أي أن الترتيب من الأصغر للأكبر هو

ب ، جـ ، أ

⑩ هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) هو هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا" وارتفاعه الجانبي ١٨٦ مترًا" أوجد ارتفاع الهرم؟

الحل

½ ل = ½ × ٢٣٢ = ١١٦ مترًا"

عَ = ١٨٦ مترًا"

∴ ع = $\sqrt{(١٨٦)^2 - (١١٦)^2}$ = ١٤٥,٤ م

Scanned with CamScanner

(١١) م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته يساوي ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم .. أوجد الارتفاع الجانبي ؟

الحل

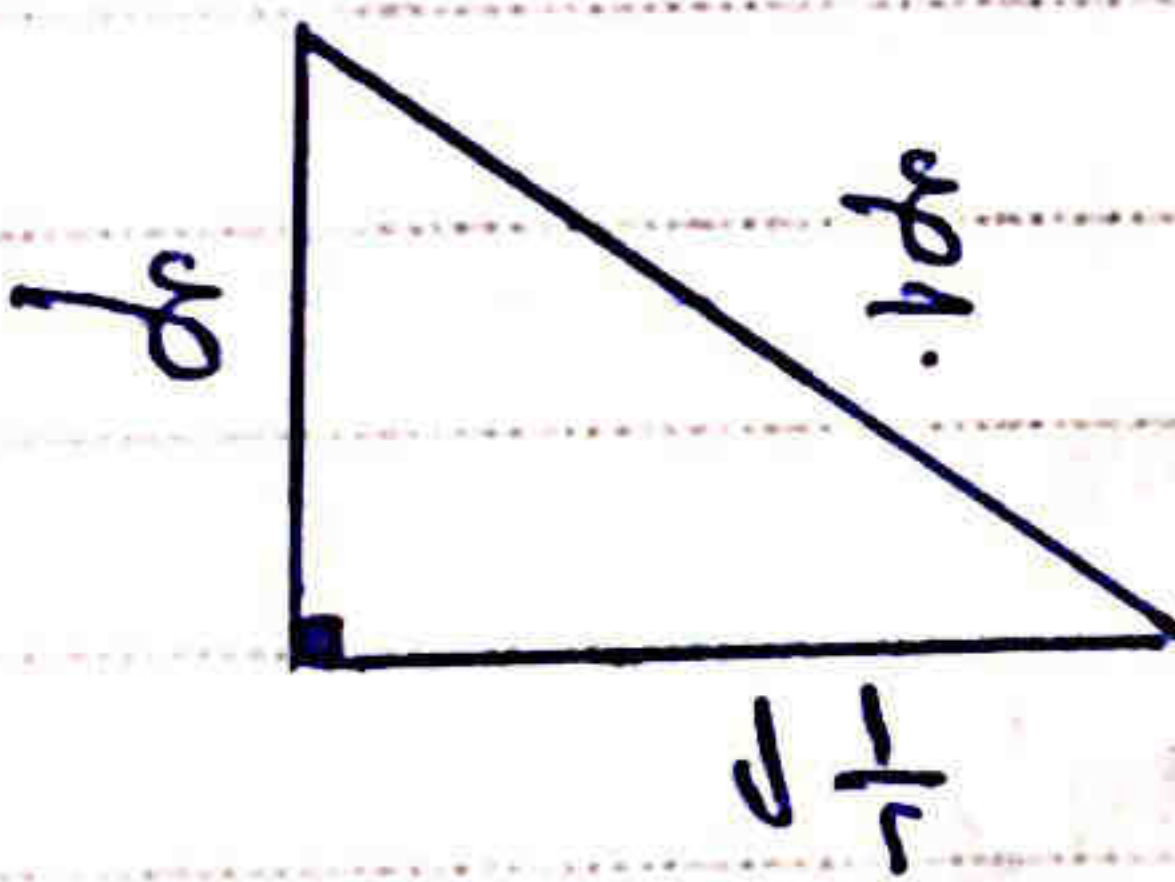
∴ الارتفاع الجانبي (م س)

م س $= \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = ١٣$ سم #

(١٢) م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم أوجد طول ضلع قاعدة الهرم ؟

الحل

▪ ن س $= \sqrt{(٢٥)^2 - (٢٠)^2} = ١٥$ سم

∴ طول ضلع القاعدة $= ١٥ \times ٢ = ٣٠$ سم

(١٣) م أ ب جـ د هرم رباعي منتظم قاعدته المربع أ ب جـ د فإذا كان ارتفاعه يساوي $٤\sqrt{٣}$ سم وطول حرفه الجانبي م أ $= ٤\sqrt{٥}$ احسب طول ضلع قاعدته ؟

الحل

▪ أ ن $= \sqrt{(٤\sqrt{٥})^2 - (٤\sqrt{٣})^2}$

$= ٤\sqrt{٢}$ سم

∴ القطر للمربع :

أ جـ $= ٢ \times ٤\sqrt{٢} = ٨\sqrt{٢}$ سم

▪ فاكر دي ؛

طول ضلع المربع $= \frac{\text{القطر}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٨\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٨$ سم

Scanned with CamScanner

(١٤) اذا كان: م ا ب جـ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول أي حرف من أحرفه $8\sqrt{3}$ سم أوجد:

- ارتفاعه الجانبي
- ارتفاع الهرم
- المساحة الكلية للهرم
- حجم الهرم

الحل

∵ الهرم الثلاثي منتظم الوجوه

∴

- الارتفاع الجانبي:

$= \frac{\sqrt{3}}{2} ل = \frac{\sqrt{3}}{2}(8\sqrt{3}) = 12$ سم

- ارتفاع الهرم:

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} ل = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(8\sqrt{3}) = 8\sqrt{2}$ سم

- المساحة الكلية:

$= ل^2\sqrt{3} = (8\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$ سم

- الحجم:

$= \frac{\sqrt{2}}{12} ل^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(8\sqrt{3})^3$

$= 128\sqrt{6}$ سم³ #

(١٥) هرم سداسي منتظم ارتفاعه ٨سم وقاعدته مسدس منتظم محيطه $24\sqrt{3}$ سم احسب طول حرف والارتفاع الهرم الجانبي؟

الحل

- طول حرف السداسي $= \frac{24\sqrt{3}}{6} = 4\sqrt{3}$ سم
- من خصائص السداسي ب ن = طول حرفه

∴ ب ن $= 4\sqrt{3}$

Δ م ن ب:

م ب $= \sqrt{64 + (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{7}$ سم

وهو طول الحرف #

Δ م س ب:

ب س $= \frac{1}{2}$ ب جـ $= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ سم

∴ م س $= \sqrt{(4\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2}$

$= 10$ سم

وهو ارتفاع الهرم الجانبي #

Scanned with CamScanner

(١٦) اذا كان م ا ب جـ د هرم رباعي قاعدته ا ب جـ د على شكل مستطيل ، ن نقطة تقاطع قطريه فاذا كانت ا ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، م ن = ١٢سم أوجد :

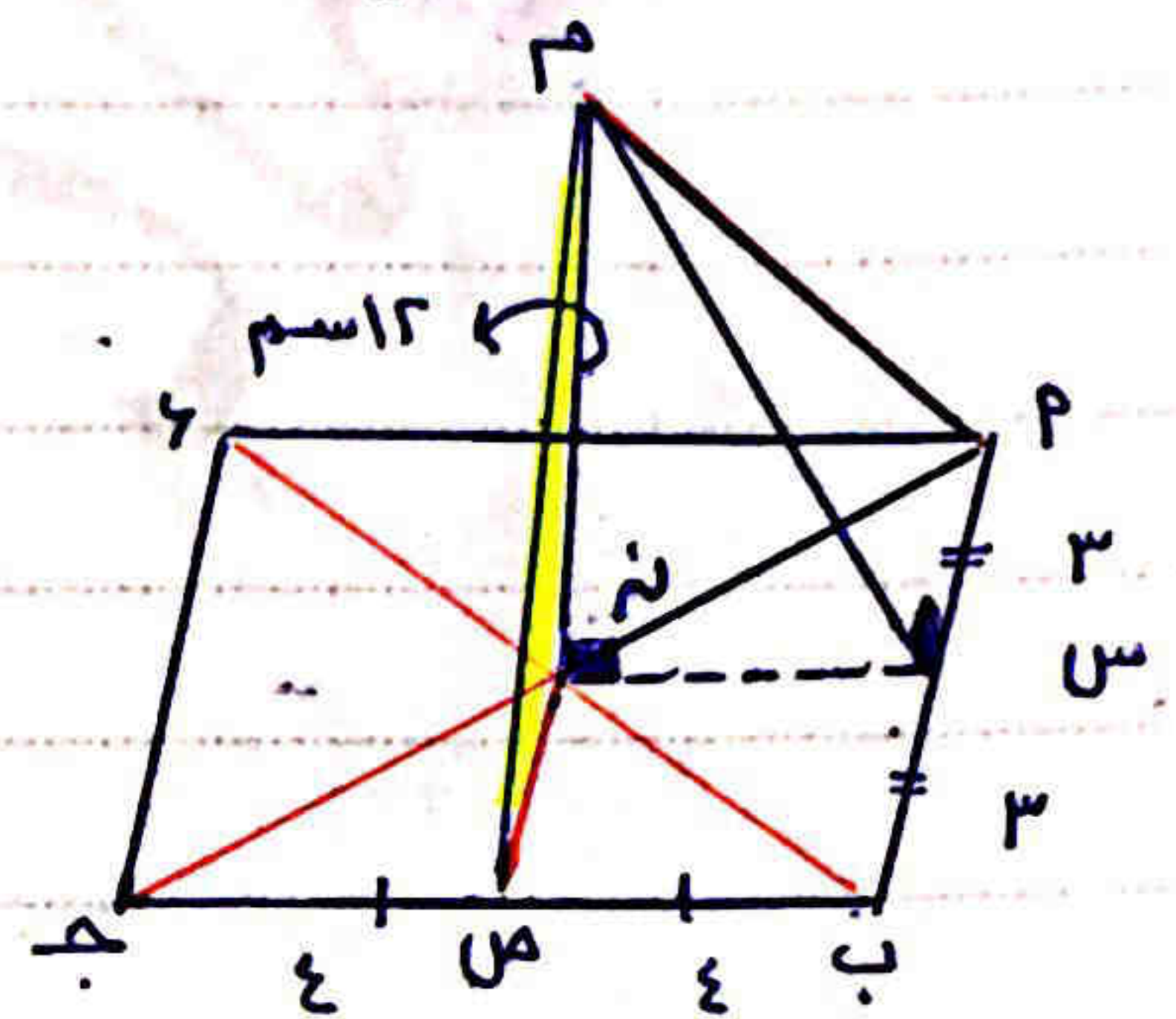
- طول الحرف الجانبي
- طول م س ، م ص حيث س منتصف ا ب ، ص منتصف ب جـ

الحل

$\triangle$ ا ب جـ :

ا جـ = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$ = ١٠سم

$\therefore$ ا ن = $\frac{١}{٢}$ ا جـ = ٥سم

$\triangle$ م ا ن :

م ا = $\sqrt{(١٢)^2 + (٥)^2}$ = ١٣سم

وهو طول الحرف الجانبي #

$\triangle$ ا ب جـ : س منتصف ا ب ، ن منتصف

ا جـ $\therefore$ س ن = ٤سم

$\triangle$ م س ن

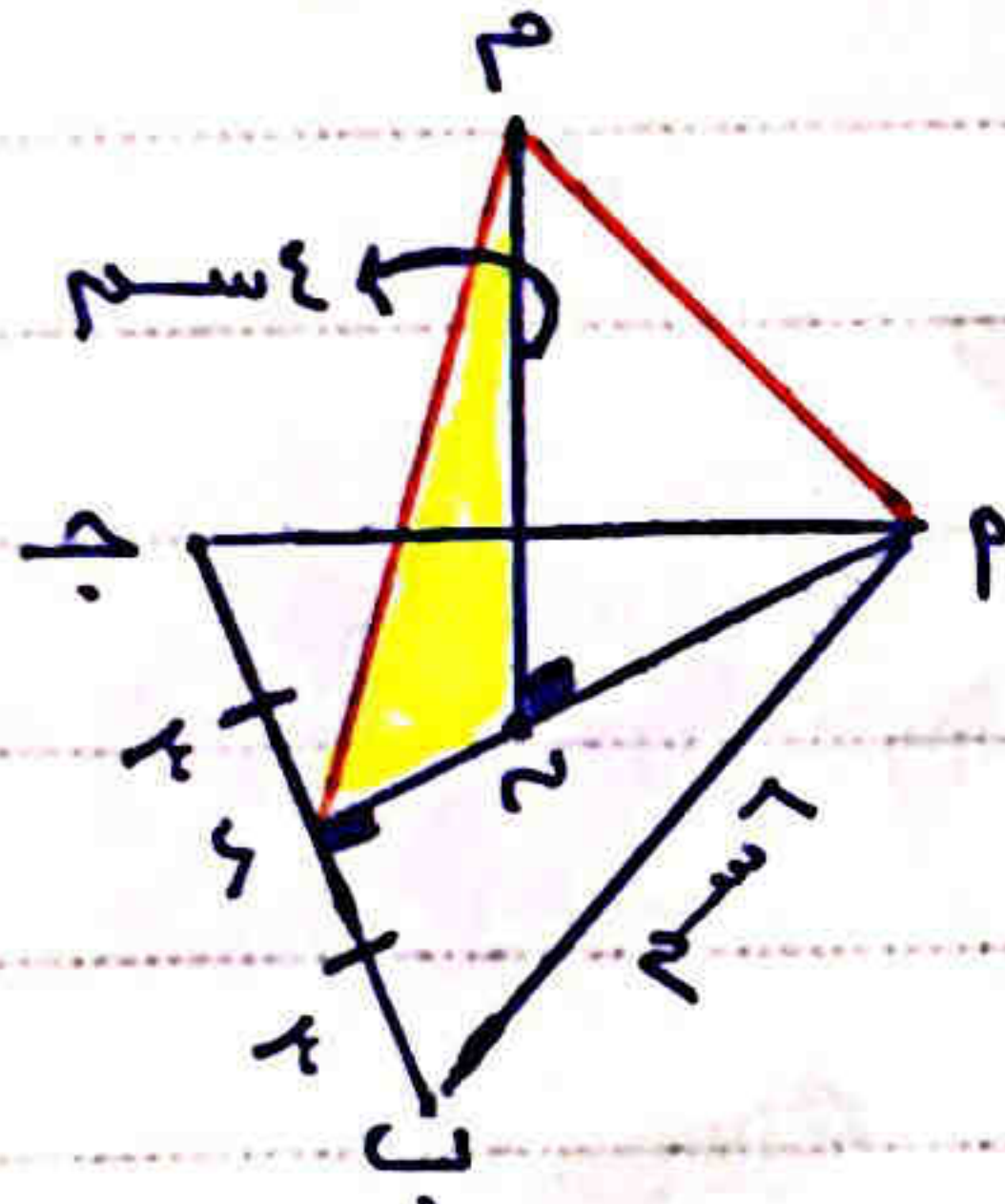
م س = $\sqrt{(١٢)^2 + (٤)^2}$ = $\sqrt{١٦٠}$ ٤ سم

بالمثل في $\triangle$ ا ب جـ

نجد أن : ن ص = $\frac{١}{٢}$ ا ب = ٣سم

$\triangle$ م ن ص

م ص = $\sqrt{(١٢)^2 + (٣)^2}$ = $\sqrt{١٥٣}$ سم

(١٧) اذا كان م ا ب جـ هرم ثلاثي منتظم قاعدته $\triangle$ ا ب جـ طول ضلع قاعدته ٦سم ، ارتفاعه ٤سم ، أوجد طول حرف وارتفاع الهرم الجانبي؟

الحل

$\triangle$ ا ب و : ا و = $\sqrt{٣٦ - ٩}$ = $٣\sqrt{٣}$ سم

$\therefore$ ا ن = $\frac{٢}{٣} \times ٣\sqrt{٣}$ = $٢\sqrt{٣}$ سم

$\triangle$ م ا ن : م ا = $\sqrt{١٦ + (٢\sqrt{٣})^2}$ = $٢\sqrt{٧}$ سم

وهو طول الحرف

ن و = $\frac{١}{٣} \times ٣\sqrt{٣}$ = $\sqrt{٣}$ سم

$\triangle$ م ن و : م و = $\sqrt{١٦ + (\sqrt{٣})^2}$ = $\sqrt{١٩}$ سم

وهو ارتفاع الهرم الجانبي

(كان ممكن نحل باستخدام الاختصارات)

Scanned with CamScanner

(١٨) في الشكل التالي شبكة لهرم رباعي منتظم أوجد:

- ارتفاع الهرم
- الارتفاع الجانبي

الحل

نجهز الشكل أولاً

△ م ب جـ قائم في ب

م جـ $= \sqrt{(٢٠)^2+(٢٠)^2} = ٢٠\sqrt{٢}$ سم

△ م مَ ن : مَ ن $= \sqrt{(٢٦)^2-(١٠\sqrt{٢})^2} = ١٠\sqrt{٢}$ سم

خلي بالك (م ن $= \frac{١}{٢}$ م جـ $= ١٠\sqrt{٢}$ سم)

△ م ب جـ (س منتصف م ب ، ن منتصف م جـ)

∴ س ن = ١٠سم

△ مَ س ن :

مَ س $= \sqrt{(١٠\sqrt{٢})^2+(١٠)^2} = ١٠\sqrt{٣}$ سم

(١٩) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦٠سم وارتفاعه الجانبي ٥٠سم أوجد

- ارتفاع الهرم
- المساحة الجانبية والكلية للهرم
- حجم الهرم

الحل

- الهرم رباعي منتظم يعني قاعدته مربعة:

م
ارتفاع ؟
٥٠سم ارتفاع جانبي
ن ٣٠سم س
نصف القاعدة

- مَ ن $= \sqrt{(٥٠)^2-(٣٠)^2} = ٤٠$ سم

وهو ارتفاع الهرم

- المساحة الجانبية

$= \frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

$= \frac{١}{٢} \times (٦٠ \times ٤) \times ٥٠ = ٦٠٠٠$ سم^2

- المساحة الكلية

= الجانبية + مساحة القاعدة

$= ٦٠٠٠ + (٦٠ \times ٦٠) = ٩٦٠٠$ سم^2

- الحجم

$= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times ٦٠ \times ٦٠ \times ٤٠ = ٤٨٠٠٠$ سم^3

Scanned with CamScanner

(٢٠) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٨ سم³ وطول ضلع قاعدته ٦ سم أوجد مساحته الكلية ؟

الحل

- حجم الهرم

$= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ $48 = \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times$ ع

∴ ع $= \frac{48}{12} = 4$ سم

- المساحة الكلية

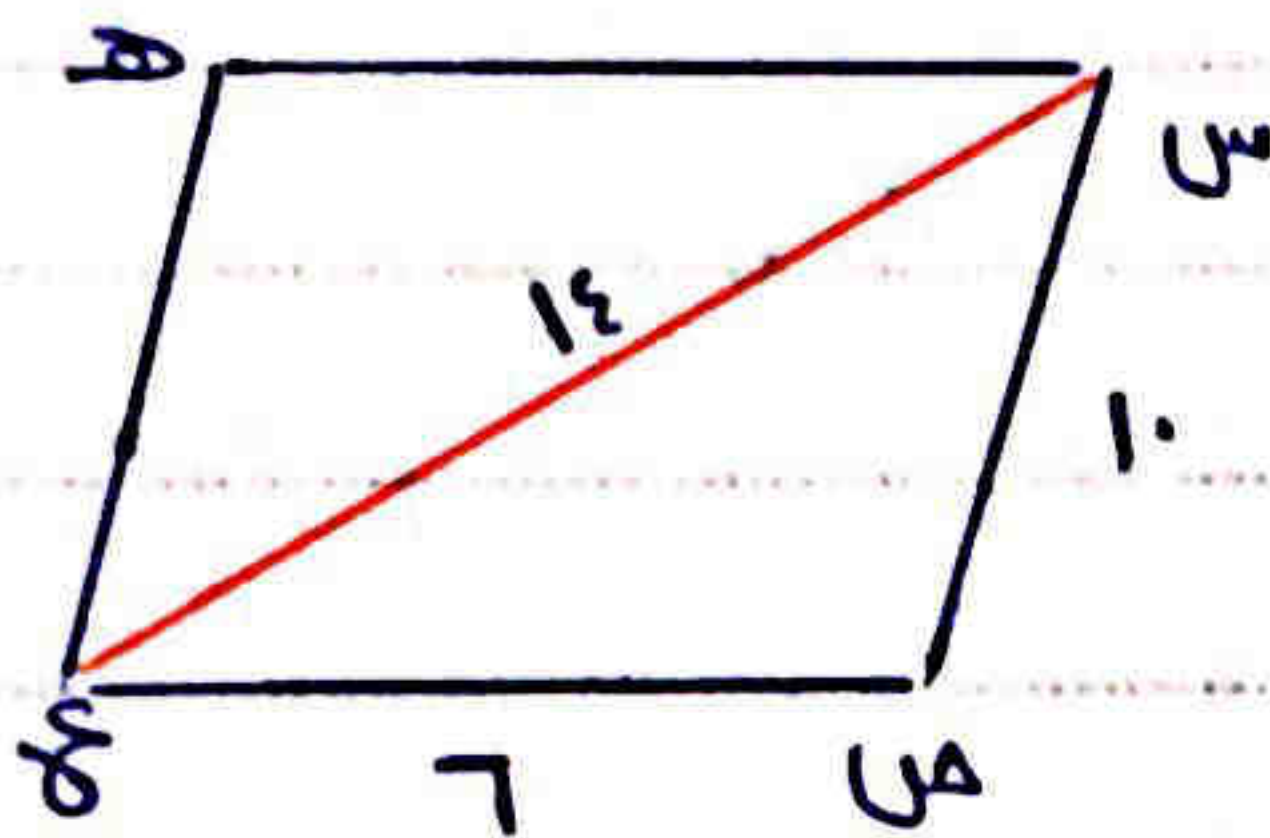
= الجانبية + مساحة القاعدة

$= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي + مساحة القاعدة

ع َ (الجانبي) $= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$ سم

∴ المساحة الكلية

$= \frac{1}{2} \times (6 \times 4) \times 5 + 6 \times 6 = 96$ سم²

(٢١) م س ص ع هـ هرم رباعي قائم قاعدته على شكل متوازي أضلاع فيه س ص = ١٠ سم ، ص ع = ٦ سم ، س ع = ١٤ سم فإذا كان ارتفاع الهرم $= 4\sqrt{3}$ أوجد حجم الهرم ؟

الحل

- مساحة متوازي الأضلاع

= ٢ × مساحة Δ س ص ع

- مساحة Δ س ص ع

$= \sqrt{ح(ح - س ص)(ح - ص ع)(ح - س ع)}$

$= \sqrt{15(15-10)(15-6)(15-14)}$

$= 15\sqrt{3}$ سم²

∴ مساحة المتوازي س ص ع هـ $= 30\sqrt{3}$ سم²

- حجم الهرم :

$= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times 30\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 120$ سم³

خلي بالك (ح ← نصف محيط المثلث)

Scanned with CamScanner

(٢٢) باستخدام الشبكة التي أمامك أوجد مساحة المجسم الكلية وكذلك حجمه

الحل

Δ ء ب ج : ء ج $= \sqrt{(30)^2+(30)^2} = 30\sqrt{2}$ سم

ء ن $= \frac{1}{2}$ ء ج $= \frac{1}{2} \times 30\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ سم

Δ م ء ن : م ن $= \sqrt{(39)^2 - (15\sqrt{2})^2}$

$= 3\sqrt{119}$ سم

∴ ارتفاع الهرم $= 3\sqrt{119}$ سم

∵ س منتصف ء ب ، ن منتصف ء ج

∴ س ن $= \frac{1}{2}$ ب ج $= 15$ سم

Δ م س ن : م س $= \sqrt{(3\sqrt{119})^2 + (15)^2}$

$= 36$ سم

∴ الارتفاع الجانبي $= 36$ سم

- المساحة الكلية $= 3060$ سم² #
- الحجم $= 900\sqrt{119}$ سم³ #

حل انت بالقانون لأنه مش فا حكه سلام

(٢٣) م ء ب جـ د هرم رباعي منتظم مساحته الكلية ٣٦٠ سم² وارتفاعه الجانبي ١٣ سم أوجد طول قاعدته وحجمه ؟

الحل

- المساحة الكلية للهرم $= 360$ سم²

∴ المساحة الكلية :

= الجانبية + مساحة القاعدة

$= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

+ مساحة القاعدة

$= \frac{1}{2} \times 4$ل $\times 13 +$ ل × ل

∴ $360 =$ ل² + 26 ل

ل² + 26 ل − 360 = 0

(ل − 10)(ل + 36) = 0

∴ ل = 10 سم

∴ طول القاعدة = 10 سم #

- ع (ارتفاع الهرم) $= \sqrt{169 - 25} = 12$ سم
- حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ع

$= \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times 12$

$= 400$ سم³ #

اعداد الاستاذ / عماد صلاح   معلم الرياضيات والاحصاء   01030252232

Scanned with CamScanner

(٢٤) م أ ب جـ هرم ثلاثي قائم في أ طول حرفه م أ = ٢٥ سم ، جـ أ = ١٢٫٦ سم ، ب أ = ١٦٫٨ سم أوجد ارتفاعه ؟

الحل

- ب جـ $= \sqrt{(١٦٫٨)^٢ + (١٢٫٦)^٢}$
  $=$ ٢١ سم
- ء منتصف ب جـ
  أ ء متوسط خارج من رأس القائمة في المثلث ب أ جـ القائم في أ
  $\therefore$ أ ء $= \frac{١}{٢}$ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ٢١$
  $=$ ١٠٫٥ سم
- $\therefore$ أ ن $= \frac{٢}{٣} \times ١٠٫٥ =$ ٧ سم
- $\triangle$ م ن أ :
  م ن $= \sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢} =$ ٢٤ سم
  وهو ارتفاع الهرم #

(٢٥) م أ ب جـ ء هرم رباعي قائم قاعدته المعين أ ب جـ ء ، أ جـ = ١٦ سم ، ب ء = ١٢ سم ، ن نقطة تقاطع قطريه فإذا كان ارتفاع الهرم م ن = ١٠ سم فأوجد أطوال أحرفه الجانبية ؟

الحل

$\triangle$ م ن أ :
- م أ $= \sqrt{(١٠)^٢ + (٨)^٢} = \sqrt{١٦٤}$ سم

$\triangle$ م ن ء :
- م ء $= \sqrt{(١٠)^٢ + (٦)^٢} = \sqrt{١٣٦}$ سم

$\therefore$ م جـ $=$ م أ $= \sqrt{١٦٤}$ سم ،

م ب $=$ م ء $= \sqrt{١٣٦}$ سم #

Scanned with CamScanner

(٢٦) هرم رباعي منتظم قاعدته معين طول قطريه ٨سم، ٤سم وارتفاعه يساوي ١٢سم، اثبت أن حجم الهرم يساوي حجم مكعب طول حرفه ٤سم؟

الحل

- حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة $\times$ ع

$= \frac{١}{٣} \times \left[\frac{١}{٢} \times ٨ \times ٤\right] \times ١٢$

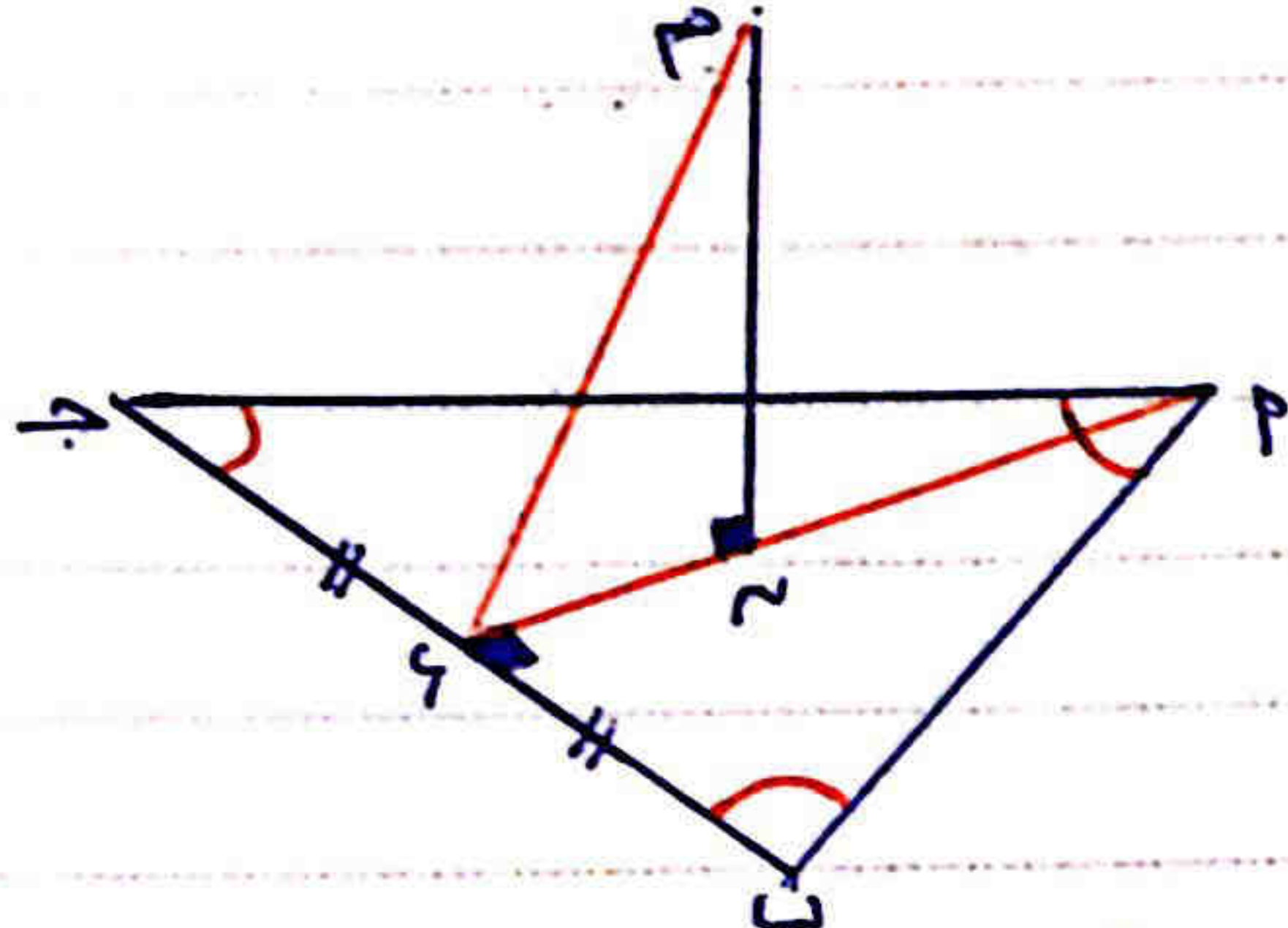
$= ٦٤$ سم^{٣}

- حجم المكعب $= ٤ \times ٤ \times ٤$

$= ٦٤$ سم^{٣}

∴ حجم الهرم = حجم المكعب #

(٢٧) أوجد حجم هرم ثلاثي منتظم ارتفاعه الجانبي ١٠سم وقاعدته مرسومة داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢سم؟

الحل

△ أ ب ج متساوي الأضلاع لأنه قال منتظم

∴ ق$(\hat{أ})$ = ق$(\hat{ب})$ = ق$(\hat{ج})$ = ٦٠°

من قاعدة الجيب:

$\frac{أ'}{حا أ} = ٢ نق \Leftarrow \frac{أ'}{حا ٦٠} = ٢ \times ١٢$ ∴ $أ' = ١٢\sqrt{٣}$ سم

- و منتصف ب ج ∴ ب و $= ٦\sqrt{٣}$ سم

△ أ ب و ← أ و $= \sqrt{(١٢\sqrt{٣})^{٢} - (٦\sqrt{٣})^{٢}}$

$= ١٨$ سم

أ و متوسط ← ∴ ن و $= \frac{١}{٣} \times ١٨ = ٦$ سم

△ م ن و ← ع = م ن $= \sqrt{(١٠)^{٢} - (٦)^{٢}} = ٨$ سم

- حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة $\times$ ع

ح $= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} \times (١٢\sqrt{٣})^{٢} \times$ حا ٦٠ $\times ٨ = ٢٨٨\sqrt{٣}$ سم^{٣}

Scanned with CamScanner

(٢٨) هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ٨سم ، ارتفاعه ١٠سم فإن حجمه = ... سم³

الحل

فاكرين :

مساحة أي مضلع منتظم

= $\frac{1}{4}$ ن س² ظتا ($\frac{180}{ن}$)

حيث : ن ← عدد الأضلاع = ٦

س ← طول الضلع = ٨

■ حجم الهرم

= $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 6 \times (8 \times 8) \times \frac{1}{ظا 30} \times 10$

= ٥٥٤,٢٥ سم³ #

لو حد فاكر قانون مساحة أي مضلع منتظم كنا عدلنا فيه علشان محدش يزعل:

م = $\frac{ن}{4}$ × س² × ظا(٩٠ − $\frac{180}{ن}$)

(٢٩) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠سم³ وارتفاعه ١٢سم احسب مساحته الجانبية ؟

الحل

الحجم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

٤٠٠ = $\frac{1}{3}$ × م × ١٢

∴ م = ١٠٠سم²

∴ ل = $\sqrt{100}$ = ١٠سم

م، ع ١٢سم، ع'، ن، س، ٥، نصف ضلع المضلع

ع' (الجانبي) = $\sqrt{144+25}$ = ١٣سم

■ المساحة الجانبية

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{1}{2}$ × (١٠×٤) × ١٣

= ٢٦٠ سم² #

Scanned with CamScanner

(٣٠) باستخدام الشبكة التي أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية؟

الحل

ءهـ $= \frac{1}{2}$ ب جـ ، ءو $= \frac{1}{2}$ أجـ ، وهـ $= \frac{1}{2}$ أب

∵ أب = ب جـ = أجـ

∴ ءهـ = ءو = وهـ

الهرم ثلاثي منتظم الوجوه.

نفرض ب جـ = أب = أجـ = ٢ل

∴ △ أءهـ متساوي الأضلاع

، أء = ءهـ = أهـ

جا٦٠ $= \frac{١٨}{ل}$ ← ∴ ل $= \frac{١٨}{جا٦٠} = ١٢\sqrt{٣}$ سم

■ المساحة الكلية = ٤ × مساحة أي وجه

ب = ٤ × $\frac{1}{2}$ × $١٢\sqrt{٣}$ × $١٢\sqrt{٣}$ × جا٦٠

= $٤٣٢\sqrt{٣}$ سم^2 #

(٣١) هرم قائم قاعدته مربعة وجميع أحرفه الثمانية متساوية ومساحته الكلية تساوي $(\sqrt{٣}+١)$ م ، أوجد طول حرفه بدلالة م ؟

الحل

لكن قال أحرف الثمانية متساوية ومعناه ان طول ضلع القاعدة = طول أي حرف من أحرف الجانبية.

نفرض: طول ضلع القاعدة = طول الحرف الجانبي يساوي ل

ع
ل
$\frac{1}{2}$ ل

من المثلث المقابل:

ع $= \sqrt{(ل)^2 - (\frac{1}{2}ل)^2} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل سم

■ المساحة الكلية = الجانبية + مساحة القاعدة

$(\sqrt{٣}+١)$ م $= \frac{1}{2} \times (٤ل) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل + ل^2

$(\sqrt{٣}+١)$ م = $\sqrt{٣}$ ل^2 + ل^2

$(\sqrt{٣}+١)$ م = ل^2 $(\sqrt{٣}+١)$

∴ م = ل^2

∴ ل = $\sqrt{م}$ #

Scanned with CamScanner

٣٢) م ا ب جـ هرم ثلاثي رأسه م على بُعد ٤√٥ من قاعدته ا ب جـ وفيه ا ب = ٧سم ، ب جـ = ٨سم ، ا جـ = ٩سم ، أوجد حجم الهرم؟

الحل

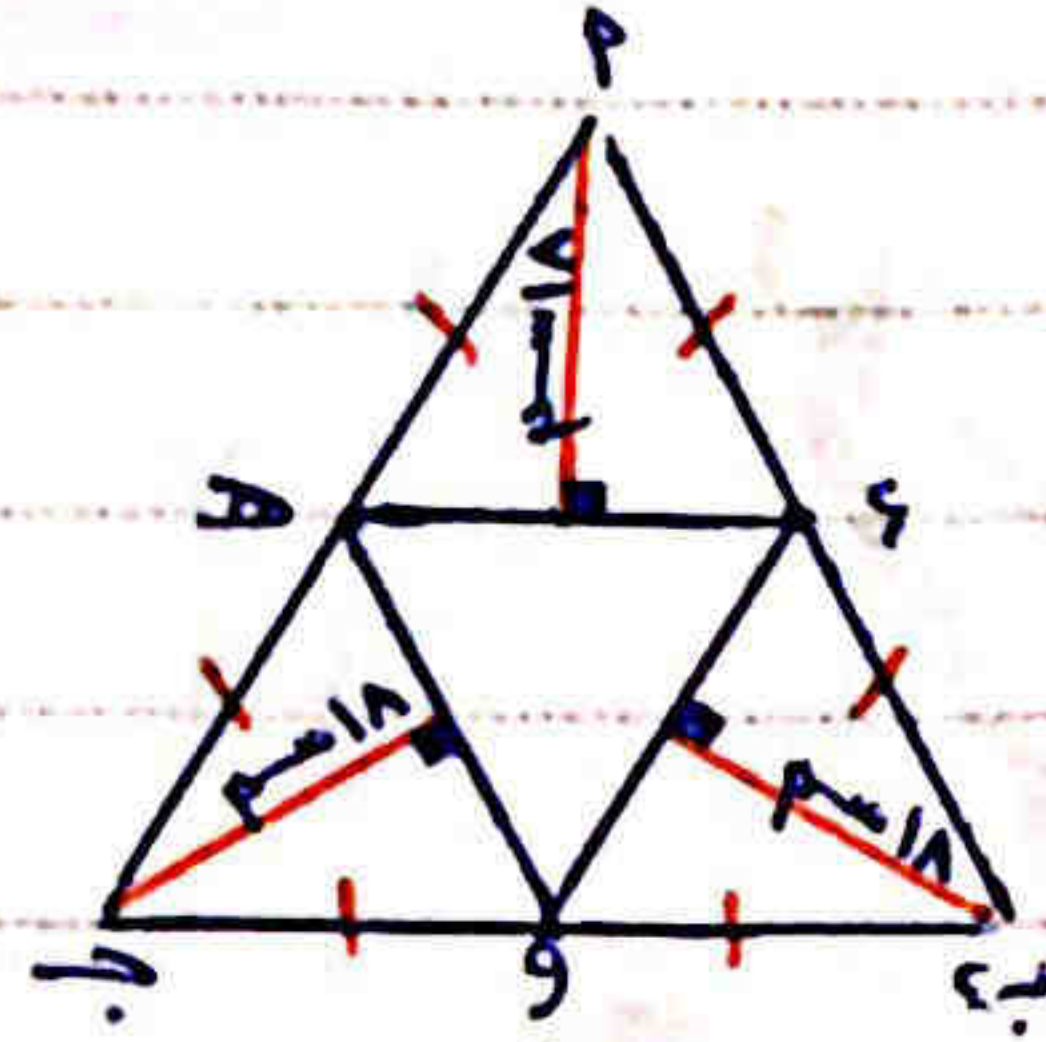
▪ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × ع

ب = $\frac{1}{3}$ $\sqrt{ح(ح-اب)(ح-بد)(ح-اجـ)}$ × ٤√٥

حيث ح = $\frac{1}{2}$ (محيط المثلث ا ب جـ)

= $\frac{1}{2}$ × (٧ + ٨ + ٩) = ١٢سم

∴ الحجم = $\sqrt{١٢(١٢-٧)(١٢-٨)(١٢-٩)}$ × ٤√٥

= ٨٠سم^٣

٣٣) النسبة بين حجم الهرم الثلاثي المنتظم وحجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه بداخل الهرم تساوي .... : ....

الحل

٣√٣ : π

٣٤) النسبة بين حجم الهرم الثلاثي المنتظم وحجم أصغر مخروط دائري قائم يحتويه تساوي .... : ....

الحل

٣√٣ : ٤π

Scanned with CamScanner

③ المخروط:

- مجسم له قاعدة على شكل منحنى مغلق.
- له رأس واحدة.
- ينتج من:
  - ← دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة.
  - ← دوران مثلث متساوي الساقين $\frac{1}{2}$ دورة حول محور تماثله.
  - ← طي ورقة على شكل قطاع دائري.

ع ← ارتفاع المخروط

ل ← الراسم

نق ← نصف قطر قاعدة المخروط.

← $ع = \sqrt{ل^2 - نق^2}$

← $ل = \sqrt{ع^2 + نق^2}$ — عقل المخروط

← $نق = \sqrt{ل^2 - ع^2}$

- $ع < ل$

- **القطاع الدائري:**

هو جزء من سطح الدائرة محدد بنصفي قطرين وقوس من الدائرة.

- أهم قوانين القطاع الدائري

← $θ^{د} = \frac{ل}{نق}$

← مساحة القطاع الدائري:

$= \frac{1}{2} ل نق$

$= \frac{1}{2} θ^{د} نق^2$

$= \frac{س^\circ}{360^\circ} \times π نق^2$

ركز في دي أوي

$ل = \frac{س^\circ}{360} \times 2π نق$

ل ← طول القوس

خلي بالك:

$θ^{د}$ ← زاوية القطاع بالتقدير الدائري (المركزية)

$س^\circ$ ← زاوية القطاع بالتقدير الستيني (المركزية)

← محيط القطاع الدائري:

$= 2نق + ل$

- لازم تتأكد أن زاوية القطاع المعطاة مركزية لأنها لو محيطية هتضربها × ٢ وذلك لأن: قياس المركزية = ٢ × المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

Scanned with CamScanner

← المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط الدائري القائم.

- المساحة الجانبية = π ل نق
- المساحة الكلية = π ل نق + π نق^2
  = π نق (ل + نق)
- الحجم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

← حماده ركز في الحاجات دي:
- التحويل من القياس:

← الستيني الى الدائري:
$\theta^{د} = \frac{س^\circ \times \pi}{180^\circ}$ (π = ٣,١٤)

← الدائري الى الستيني:
$س^\circ = \frac{\theta^{د} \times 180}{\pi}$ (π = ٣,١٤)

- للتحويل من قطاع دائري الى مخروط
← نق (للقطاع) = ل (راسم المخروط)
← ل (طول قوس القطاع) = ٢ π نق
حيث (٢ π نق) محيط قاعدة المخروط

- اذا كان:
← ل > ٢ نق فان $0^\circ < \theta < 180^\circ$
← ل = ٢ نق فان $\theta = 180^\circ$
← ل < ٢ نق فان $180^\circ < \theta < 360^\circ$
حيث ل ← راسم المخروط.

- المخروط الدائري القائم هو أيضاً مجسم ناتج عن دوران مثلث متساوي الساقين نصف دورة حول محور تماثله.

- بص وانت بتحول القطاع الى مخروط بتحسب طول قوس القطاع سيبه بدلالة π لانك هتطيرها مع π بتاعة محيط دائرة المخروط.

Scanned with CamScanner

** تمارين محلولة **

① مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥سم وارتفاعه ٢٤سم ، أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط ؟

الحل

ل = ٢٥سم

ع = ٢٤سم

∴ نق = $\sqrt{(25)^2 - (24)^2}$ = ٧سم

← محيط القاعدة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٧ = ١٤ ط

← مساحة القاعدة = ط نق^2 = ٤٩ ط سم^2

② مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ١٢سم وارتفاعه ٨سم ، أوجد مساحته الجانبية والكلية والحجم ؟

الحل

القطر = ١٢سم ∴ نق = ٦سم

ع = ٨سم

∴ ل = $\sqrt{(6)^2 + (8)^2}$ = ١٠سم

- ج = ط ل نق = ٦٠ ط سم^2
- ك = ٦٠ ط + ٣٦ ط = ٩٦ ط سم^2
- الحجم = $\frac{1}{3}$ × ط × ٣٦ × ٨ = ...سم^3

③ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٢٥ ط سم^2 ، طول راسمه ١٣سم ، أوجد مساحته الجانبية والكلية والحجم ؟

الحل

- مساحة القاعدة = ط نق^2

٢٥ ط = ط نق^2

∴ نق = ٥سم

- ع = $\sqrt{(13)^2 - (5)^2}$ = ١٢سم

← ج = ط ل نق

= ط × ١٣ × ٥ = ٦٥ ط سم^2

← ك = ٦٥ ط + ط × ٢٥

= ٩٠ ط سم^2

← الحجم = $\frac{1}{3}$ × ط نق^2 × ع

= $\frac{1}{3}$ × ط × ٢٥ × ١٢

= ١٠٠ ط سم^3 #

Scanned with CamScanner

④ دورق مخروطي الشكل سعته ٦,١٦ لتر ، ارتفاعه ٣٠ سم أوجد طول نصف قطر قاعدته حيث ($\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

حجم الدورق = ٦,١٦ × ١٠٠٠ = ٦١٦٠ سم^3

▪ الحجم = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

٦١٦٠ = $\frac{1}{3}$ × π × نق^2 × ٣٠

٦١٦٠ = $\frac{1}{3}$ × $\frac{22}{7}$ × نق^2 × ٣٠

∴ نق = ١٤ سم #

⑤ قطاع دائري مساحته ٢٥ π سم^2 وقياس زاويته المركزية = ٩٠° تحول إلى مخروط دائري قائم أوجد ارتفاعه

الحل

▪ القطاع :

← المساحة = $\frac{س°}{360°}$ × π نق^2

٢٥ π = $\frac{90°}{360°}$ × π × نق^2

نق^2 = ١٠٠ ∴ نق = ١٠ سم

← المساحة = $\frac{1}{2}$ ل نق

٢٥ π = $\frac{1}{2}$ × ل × ١٠

∴ ل = ٥ π

▪ المخروط :

← نق (للقطاع) = ل (للمخروط)

∴ ل = ١٠ سم

← ل (للقطاع) = ٢ π نق (للمخروط)

٥ π = ٢ × π × نق

∴ نق = ٢,٥ سم

∴ ع (للمخروط) : = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ = $\sqrt{100 - (2,5)^2}$

= ٩,٦٨ سم #

Scanned with CamScanner

⑥ مخروط دائري قائم محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم أوجد كلاً من:

- المساحة الجانبية.
- المساحة الكلية.
- الحجم.

الحل

ع = ٢٥سم ، محيط القاعدة = ٤٤سم

نق = ؟ ، ل = ؟

- محيط القاعدة = ٢ ط نق

٤٤ = ٢ ط نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق

∴ نق = ٧ سم

- ل = $\sqrt{ع^٢ + نق^٢}$ = $\sqrt{(٢٥)^٢ + (٧)^٢}$

∴ ل =

- المساحة الجانبية:

= ط ل نق = ... سم^٢

- المساحة الكلية:

= الجانبية + ط نق^٢ = ... سم^٢

- الحجم:

= $\frac{١}{٣}$ ط نق^٢ ع = ... سم^٣

⑦ أوجد طول نصف قطر مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٦١٦ ط سم^٢ وطول راسمه ٣٠ سم؟

الحل

ل = ٣٠سم

المساحة الكلية = ٦١٦ ط سم^٢

- المساحة الكلية:

= ط ل نق + ط نق^٢

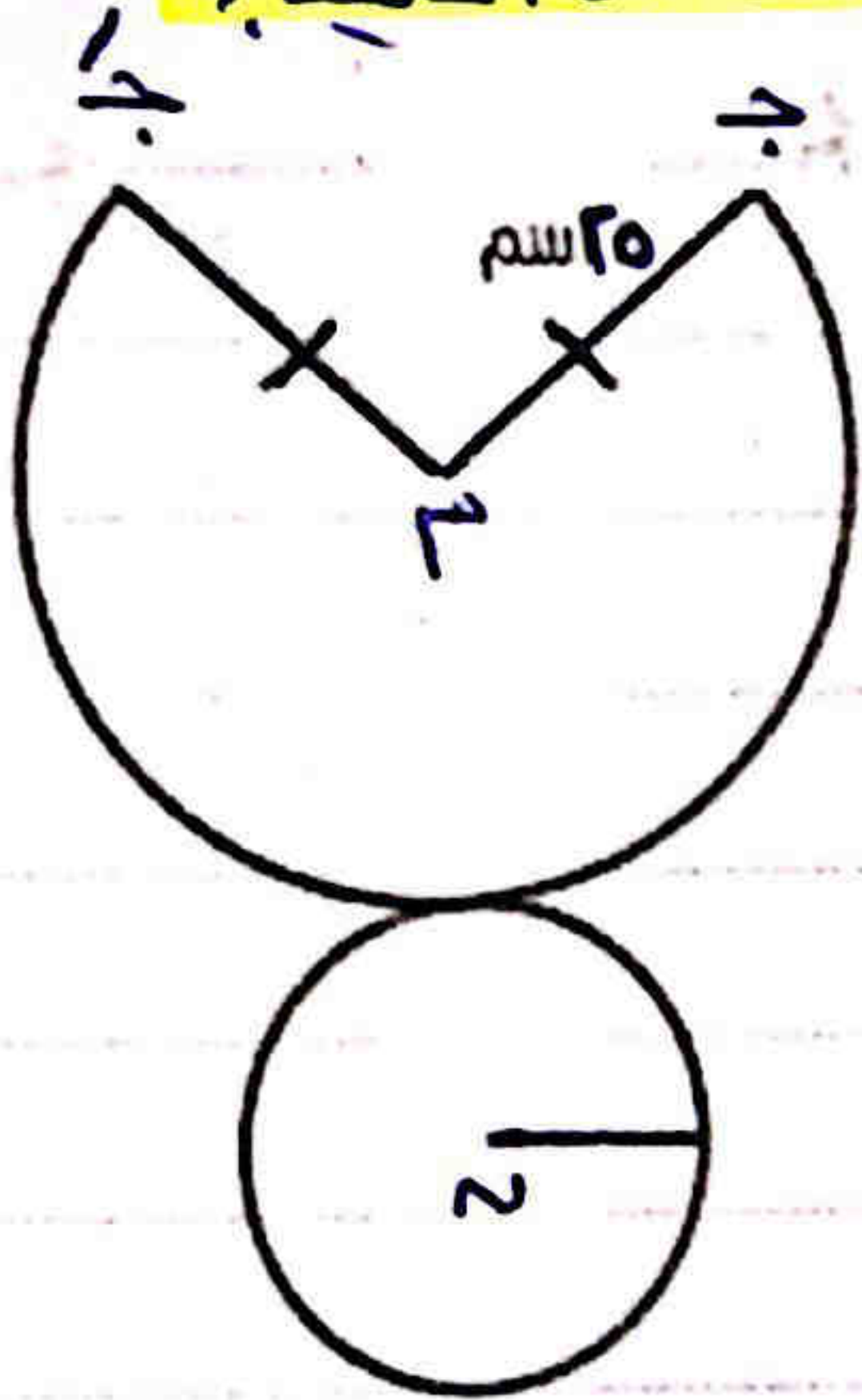
= ط نق (ل + نق)

٦١٦ ط = ط نق (٣٠ + نق)

∴ نق^٢ + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

(نق + ٤٤)(نق − ١٤) = ٠

∴ نق = ١٤سم #

Scanned with CamScanner

⑧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم ، صهر وحول الى مخروط دائري قائم ارتفاعه ٢١ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط ، اذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل حيث ($\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

حجم المكعب = ٢٠ × ٢٠ × ٢٠ = ٨٠٠٠ سم^3

∴ حجم المخروط = ٨٠٠٠ × ٨٨٪

= ٧٠٤٠ سم^3

▪ الحجم للمخروط :

= $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

٧٠٤٠ = $\frac{1}{3}$ × $\frac{22}{7}$ × نق^2 × ٢١

∴ نق = ٨ $\sqrt{5}$ سم #

جزيت أجمل الجزاء ،
دعواتكم لنا أحباب
عماد صلاح

⑨ باستخدام الشبكة التي أمامك صف المجسم واذا كان طول القوس $\overset{\frown}{جـ جـ'}$ = ٣٠ π سم ، أوجد حجم المجسم ومساحته الكلية ؟

الحل

فاكرده :

▪ ل (للقطاع) = ٢ π نق (لقاعدة المخروط)

٣٠ π = ٢ × π × نق

∴ نق = ١٥ سم

▪ نق (للقطاع) = ل (للمخروط)

∴ ل = ٢٥ سم

← ع = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ = $\sqrt{(25)^2 - (15)^2}$ = ٢٠ سم

▪ المساحة الجانبية :

= π ل نق = π × ٢٥ × ١٥ = ٣٧٥ π سم^2

▪ المساحة الكلية :

= ٣٧٥ π + π × (١٥)^2

= ٦٠٠ π سم^2

▪ الحجم = $\frac{1}{3}$ × π × (١٥)^2 × ٢٠ = ١٥٠٠ π سم^3

Scanned with CamScanner

⑩ هرم ثماني منتظم من الفضة طول ضلع قاعدته ٦سم، وارتفاعه ٣٠سم صُهر وحُوّل إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٩سم فإذا علم أن ١٠٪ من الفضة فقد أثناء الصهر والتحويل أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشري واحد؟

الحل

- حجم الهرم $= \frac{١}{٣} \times$ مساحة القاعدة $\times$ ع

$= \frac{١}{٣} \times \left(\frac{١}{٤} \times ٨ \times ٣٦ \times \text{ظتا}\left(\frac{١٨٠}{٨}\right)\right) \times ٣٠$

$=$ ١٧٣٨,٢ سم^{٣}

- حجم المخروط $=$ ١٧٣٨,٢ $\times$ ٩٠٪

$=$ ١٥٦٤,٤ سم^{٣}

- حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع

$١٥٦٤,٤ = \frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٨١ \times$ ع

∴ ع ≃ ١٨,٤ سم #

⑪ قطاع دائري م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوي ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم أوجد حجمه؟

الحل

- القطاع:

نق = ١٨سم ، س° = ٦٠°

← $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

$\frac{ل}{١٨} = \frac{٦٠ \times \pi}{١٨٠}$

∴ ل = ٦π سم

- نق (للقطاع) = ل (للمخروط)

∴ ل = ١٨سم ← للمخروط

- ل (للقطاع) = ٢π نق (للمخروط)

٦π = ٢π نق

∴ نق = ٣سم ← للمخروط

← ع $= \sqrt{(١٨)^{٢} - (٣)^{٢}} = ٣\sqrt{٣٥}$ سم

- الحجم $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} ع

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times ٩ \times ٣\sqrt{٣٥}$

$=$ ١٦٧,٣ سم^{٣} #

حل آخر: كان ممكن نحسب ل مباشرة

ل $= \frac{٦٠}{٣٦٠} \times ٢ \times \pi \times ١٨ = ٦\pi$

Scanned with CamScanner

(١٢) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتشكل مخروطاً "دائرياً" قائماً أوجد ارتفاع المخروط وحجمه؟

الحل

▪ القطاع:

نق = ٣٦ سم ، س° = ٢١٠°

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} \leftarrow \frac{٢١٠ \times \pi}{١٨٠} = \frac{ل}{٣٦}$

∴ ل = ٤٢ π

▪ المخروط

∵ نق (للقطاع) = ل (للمخروط) ∴ ل = ٣٦ سم

٤٢ π = ٢ π نق

∴ نق = ٢١ سم

▪ ع = $\sqrt{(٣٦)^2 - (٢١)^2}$ = $٣\sqrt{٩٥}$ سم

∴ الحجم:

= $\frac{١}{٣} \times \pi \times (٢١)^2 \times ٣\sqrt{٩٥}$

≃ ٦٩٢٧ سم³

(١٣) أيهما أكبر حجماً؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم ، وارتفاعه ٢٠ سم ، أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم؟

الحل

▪ المخروط:

نق = ١٥ سم ، ع = ٢٠ سم

← الحجم:

= $\frac{١}{٣} \times \pi \times (١٥)^2 \times (٢٠)$

= .... سم³

▪ الهرم الرباعي المنتظم

ع = ٤٠ سم ، محيط القاعدة = ٤٨

∵ الهرم رباعي منتظم

∴ طول ضلع القاعدة = $\frac{٤٨}{٤}$ = ١٢ سم

← الحجم:

= $\frac{١}{٣} \times (١٢)^2 \times ٤٠$

= .... سم³

قارن انت بقى يا معلم #

Scanned with CamScanner

⑭ من الشكل التالي: أوجد - الارتفاع، المساحة الجانبية والمساحة الكلية:

الحل

▪ القطاع:

ل = ٤٤سم ، نق = ١٢سم

▪ المخروط:

$٤٤ = ٢\pi$ نق $= ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق

∴ نق = ٧ سم

، ل = ١٢سم

∴ ع $= \sqrt{(١٢)^٢ - (٧)^٢} = \sqrt{٩٥}$ سم

▪ المساحة الجانبية:

$= \pi$ نق ل $= \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \times ١٢ = ٢٦٤$ سم^٢

▪ المساحة الكلية:

$= ٢٦٤ + \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^٢ = ٤١٨$ سم^٢

▪ الحجم:

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^٢ \times \sqrt{٩٥}$

$= ٥٠٠,٣٥$ سم^٣ #

⑮ من خلال الشكل التالي: احسب بدلالة π حجم المجسم الناتج من دوران △ أوب دورة كاملة حول:

أ- محور السينات ب- محور الصادات

الحل

▪ محور السينات:

محور الدوران هو $\overleftrightarrow{وب}$ ∴ ع = ٤سم

، نق = ٣سم ، ل $= \sqrt{١٦+٩} = ٥$سم

← الحجم $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

$= \frac{١}{٣} \pi \times ٩ \times ٤$

$= ١٢ \pi$ وحدة مكعبة #

▪ محور الصادات:

محور الدوران هو $\overleftrightarrow{وأ}$ ∴ ع = ٣سم

، نق = ٤سم ، ل $= \sqrt{١٦+٩} = ٥$سم

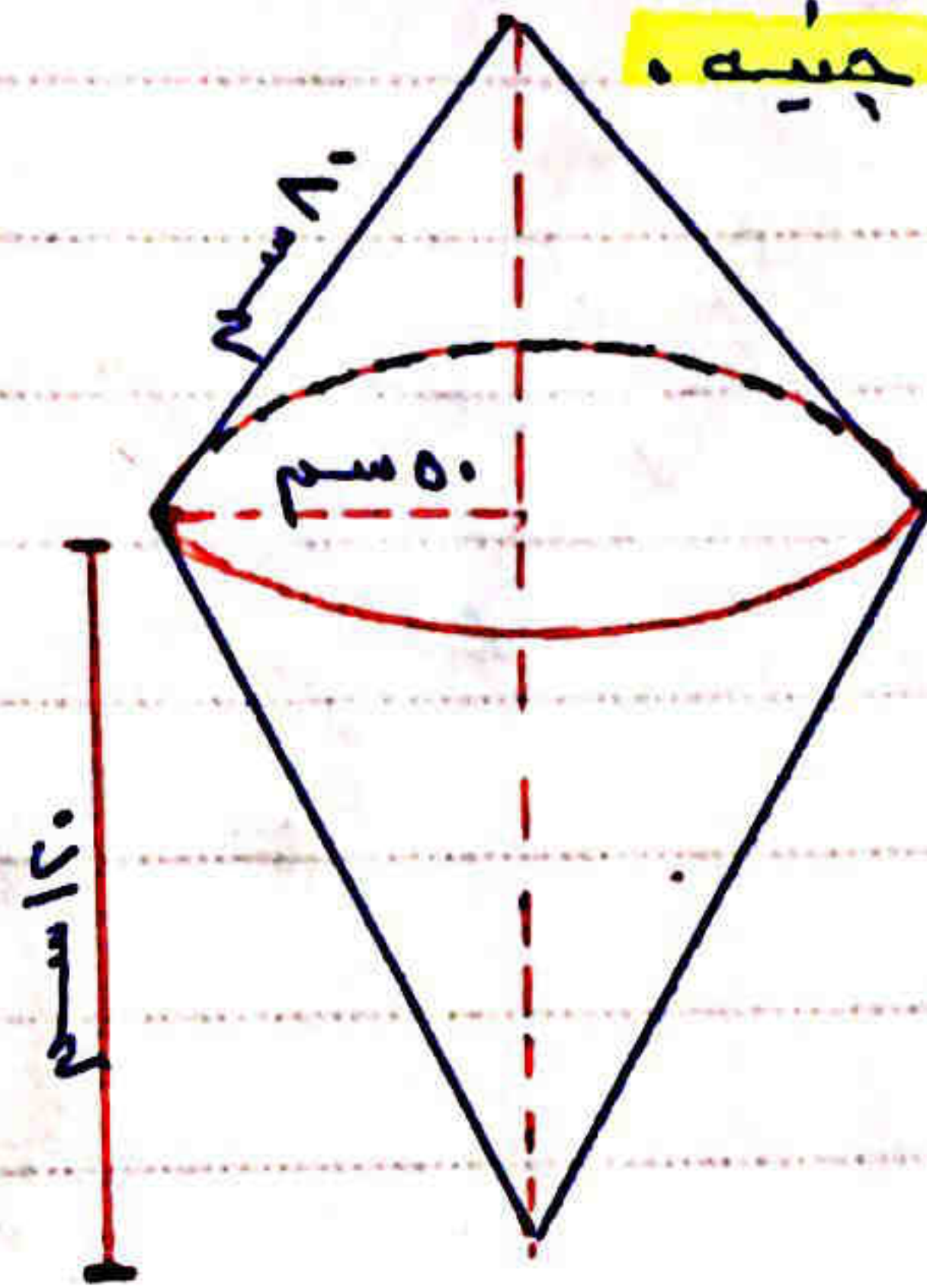
← الحجم $= \frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

$= \frac{١}{٣} \pi \times ١٦ \times ٣$

$= ١٦ \pi$ وحدة مكعبة #

Scanned with CamScanner

(١٦) في الشكل التالي :

استخدم وا (ا) لتحديد المجرى الملاحي وهو على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة . أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية علماً بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه .

٨٠ سم

٥٠ سم

١٢٠ سم

▪ المخروط الأول :

نق١ = ٥٠ سم ، ل١ = ٨٠ سم

▪ المخروط الثاني :

نق٢ = ٥٠ سم ، ع٢ = ١٢٠ سم

∴ ل٢ = $\sqrt{(٥٠)^2 + (١٢٠)^2}$ = ١٣٠ سم

ركز لازم نحول من سم الى متر لأنه قال تكلفة المتر المربع .

و علشان نحول من سم الى م اقسم على ١٠٠

▪ المساحة الجانبية :

= π ل١ نق١ + π ل٢ نق٢

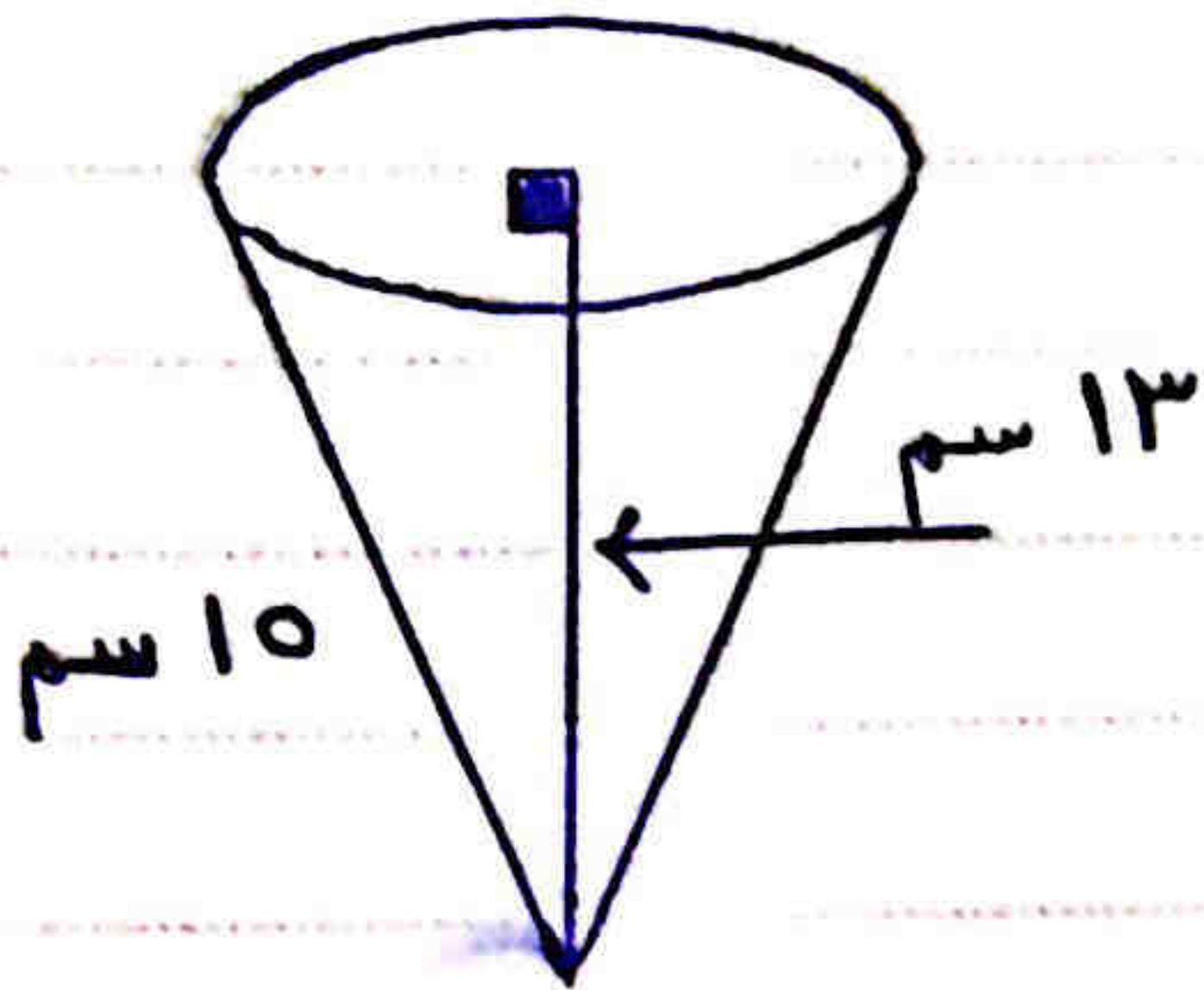
= $\pi \times \frac{٨٠}{١٠٠} \times \frac{٥٠}{١٠٠} + \pi \times \frac{١٣٠}{١٠٠} \times \frac{٥٠}{١٠٠}$

= ٣,٣ وحدة مربعة

∴ التكلفة :

= ٣٠٠ × ٣,٣ = ٩٩٠ جنيهاً #

Scanned with CamScanner

⑰ أوجد المساحة الجانبية والكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة:

حاول أن تحل

الاجابات (٧٢π سم² / ١٠٨π سم²)

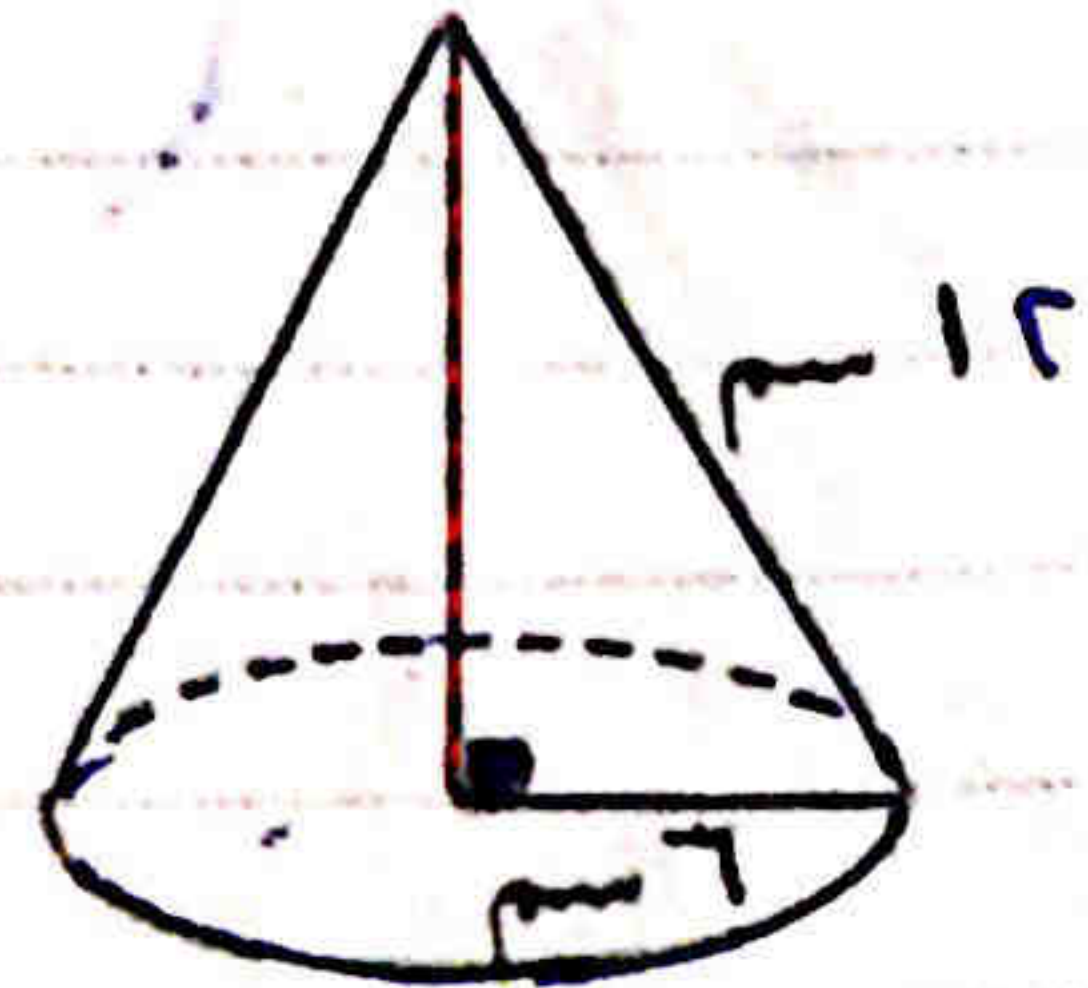
٩ سم

١٢ سم

حاول أن تحل

الاجابات (١٣٥π سم² / ٢١٦π سم²)

حاول أن تحل

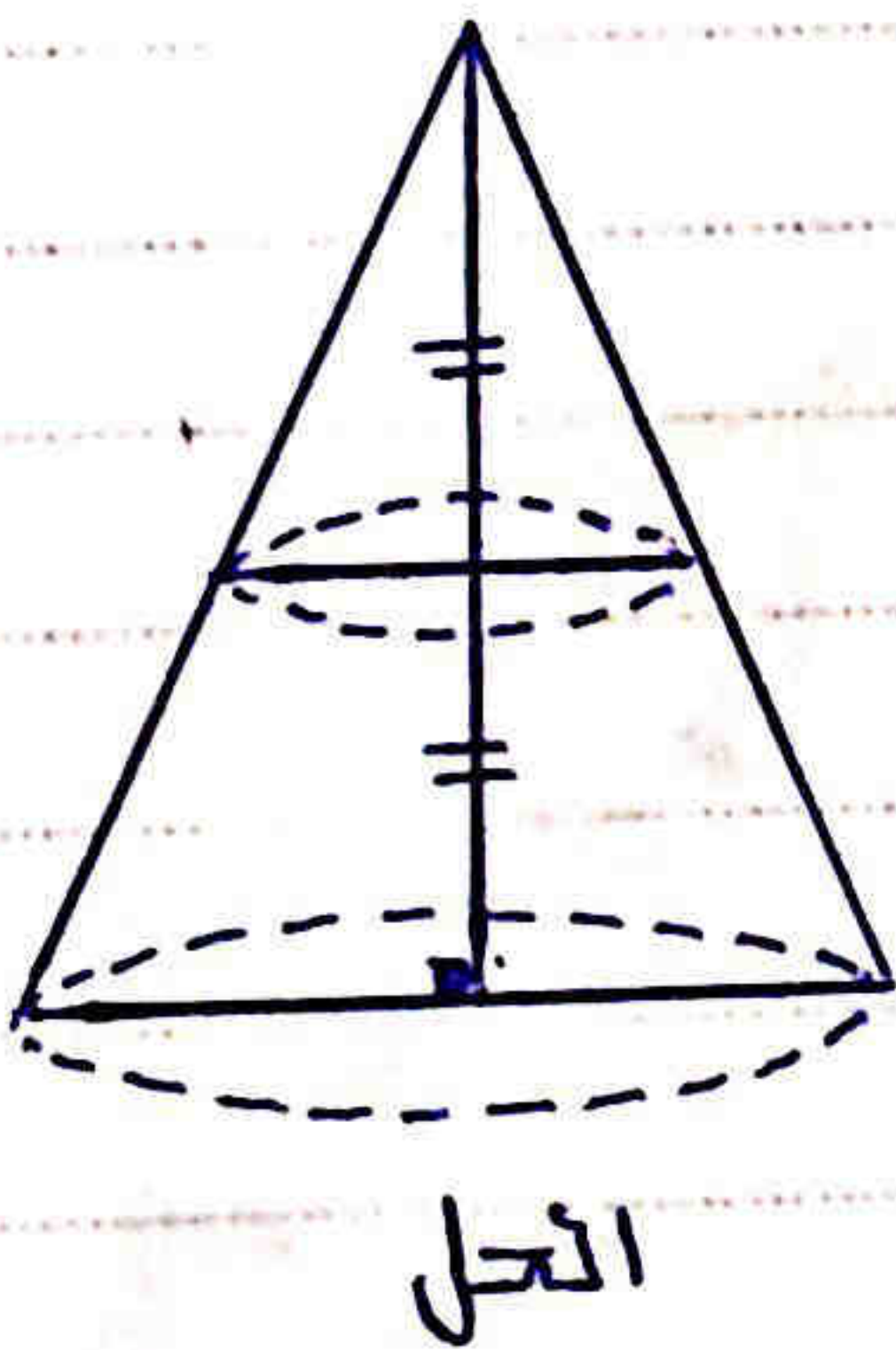
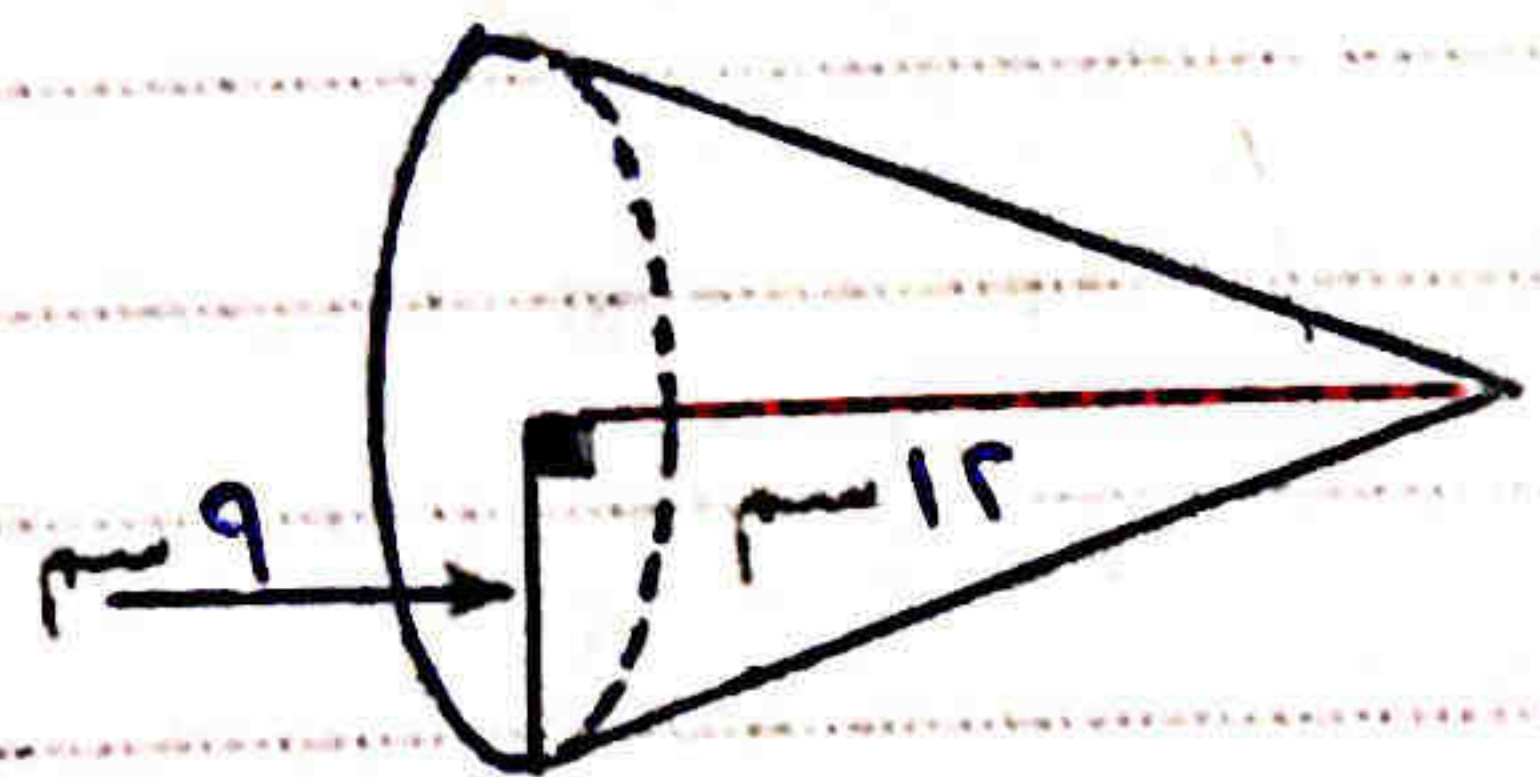
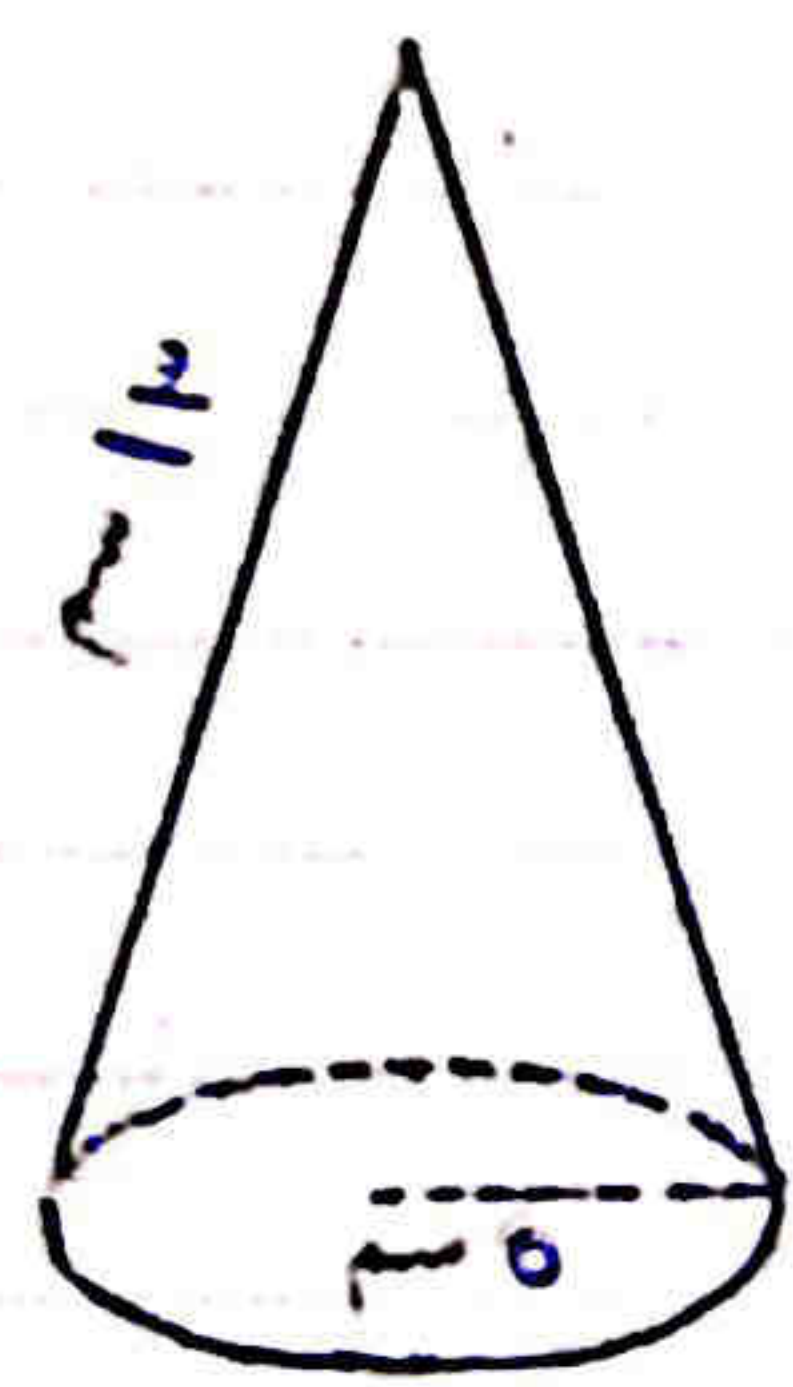
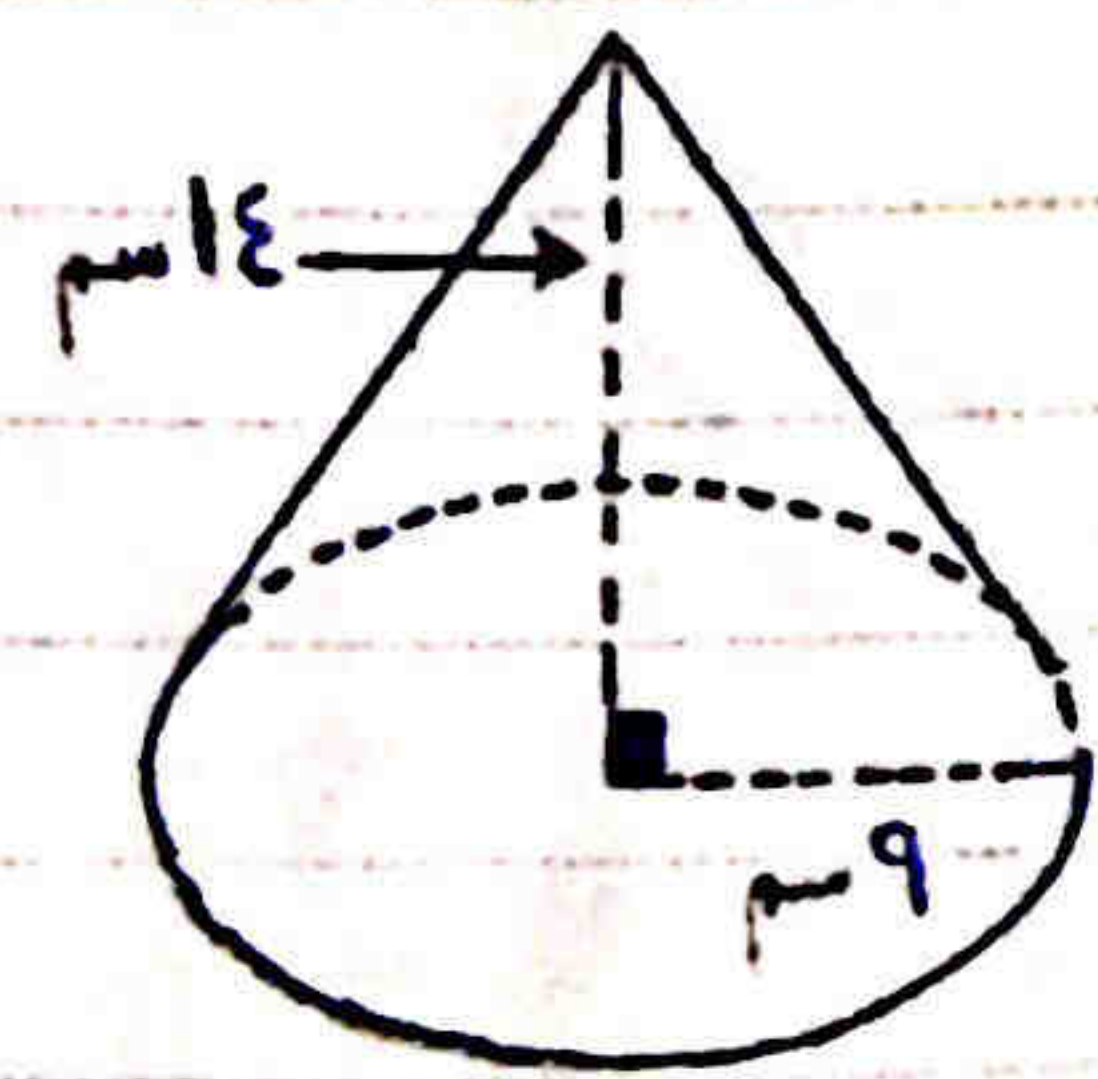
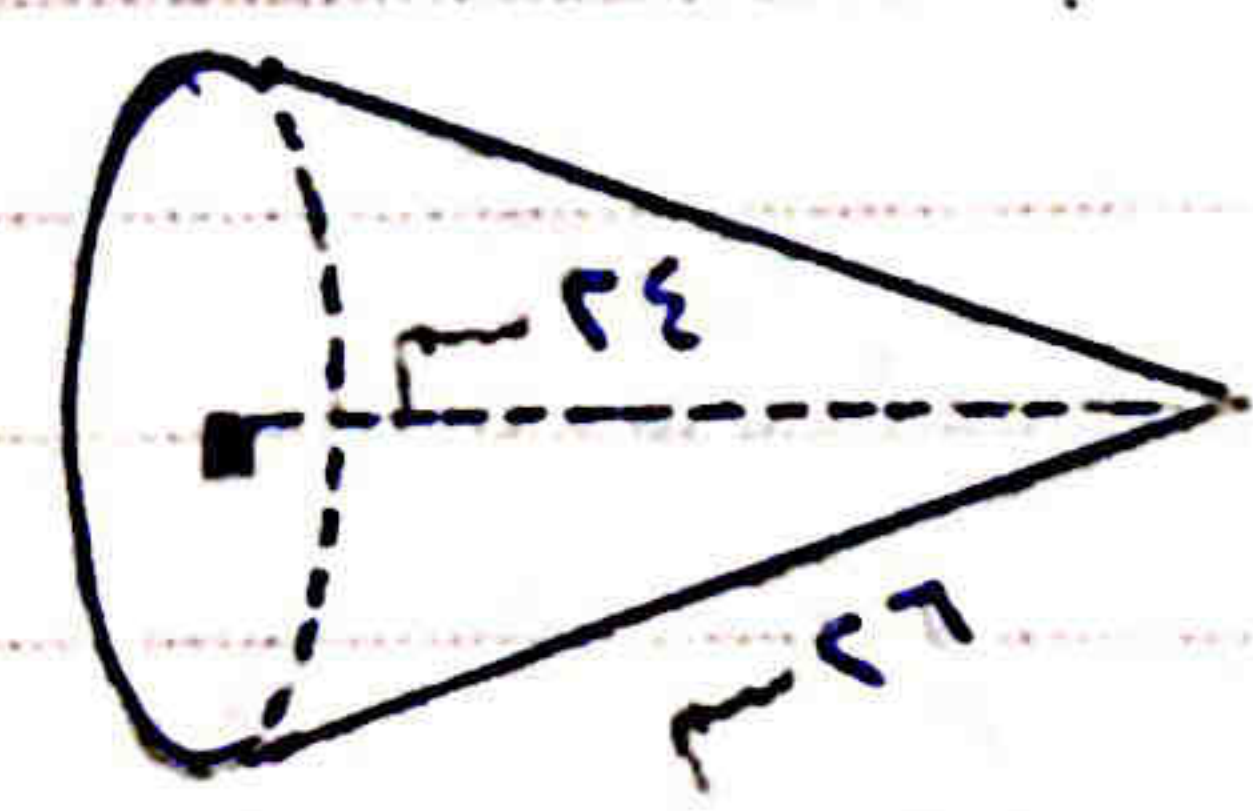
الاجابات (٣٠√١٤ π سم² / ....)

■ النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط الصغير : المساحة الجانبية للمخروط الأكبر من الشكل الذي أمامك يساوي ......

الحل

الأصغر : الأكبر

π ل نق : π × ٢ل × ٢نق

١ : ٤

Scanned with CamScanner

(١٨) أوجد الحجم لكل مخروط قائم موضح بالشكل حسب البيانات المعطاة

١٤سم

٩سم

حاول أن تحل

الإجابة (٣٧٨ π سم³)

٢٤سم

٢٦سم

حاول أن تحل

الإجابة (٨٠٠ π سم³)

١٣سم

٥سم

حاول أن تحل

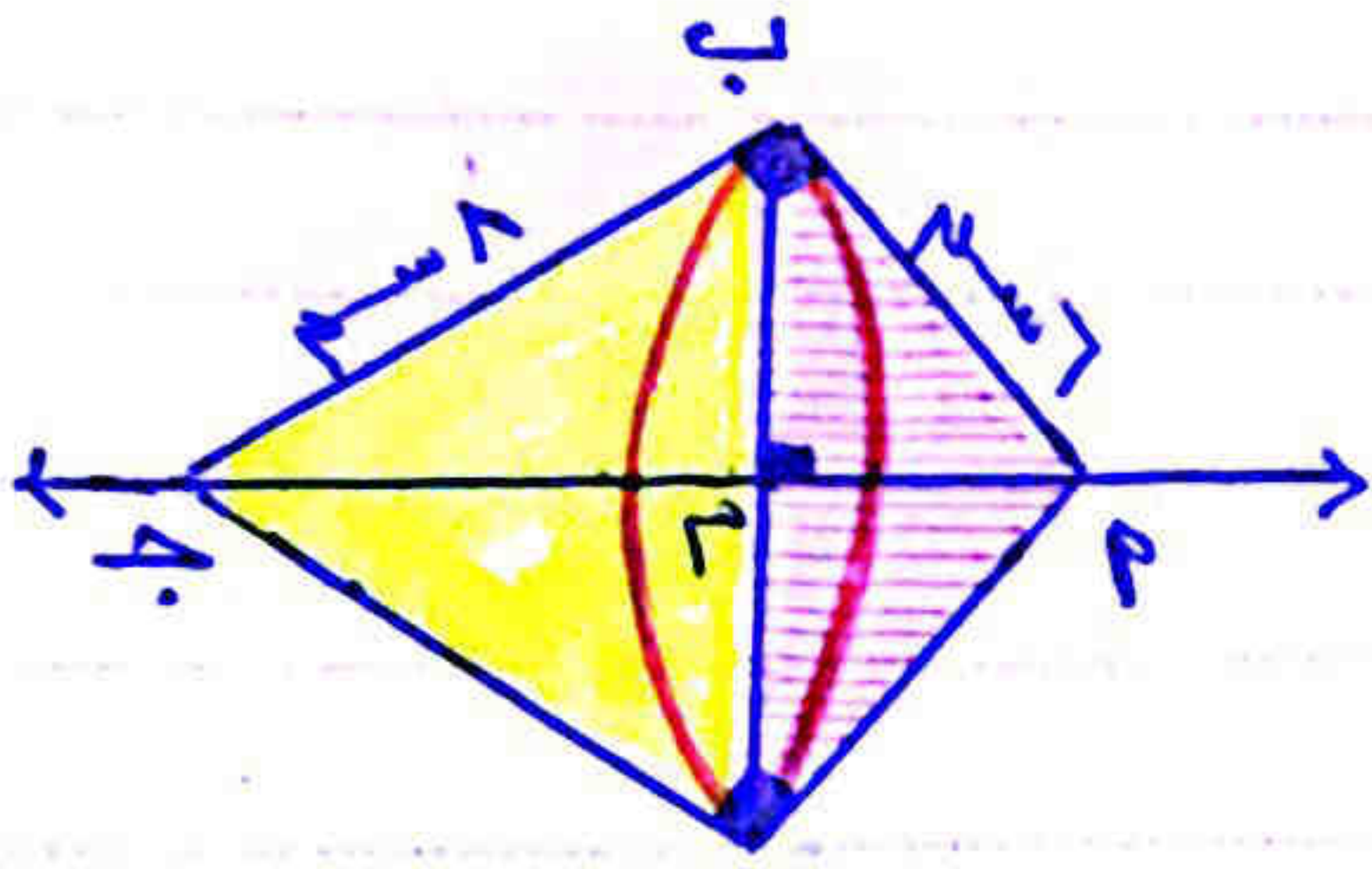
الإجابة (١٠٠ π سم³)

اعداد الاستاذ / عماد صلاح
معلم الرياضيات والاحصاء
01030252232

Scanned with CamScanner

(١٩) في الشكل التالي:
صهريج مياه على شكل مخروط قائم، حجمه ٣٢ π م³، ارتفاعه ٦ م
أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.

الحل

- حجم الصهريج $= \frac{1}{3} \pi$ نق² ع

∴ ٣٢ $\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times$ نق² × ٦

∴ نق² = ١٦ ← نق = ٤ سم

- ل = $\sqrt{\text{ع}^2 + \text{نق}^2}$

$= \sqrt{(٣٦) + (١٦)}$

= ٢ $\sqrt{١٣}$ م

- المساحة الكلية:

= π ل نق + π نق²

= π نق (ل + نق)

= π × ٤ × (٢ $\sqrt{١٣}$ + ٤)

≃ ١٤٠,٩ م² #

اللهم بارك لي في بناتي
هنا و حلا

Scanned with CamScanner

(٢) ٩ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
فيه ٩ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم
أوجد حجم الجسم الناشئ من
دوران △ ٩ب جـ دورة كاملة حول:
(٩) $\overleftrightarrow{ب٩}$ (ب) $\overleftrightarrow{٩جـ}$

الحل

▪ الدوران حـــول $\overleftrightarrow{ب٩}$

مخروط قائم:
ع = ٨سم ، نق = ٦سم

∴ الحجم:
$= \frac{١}{٣} \times \pi \times نق^٢ \times ع$

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times ٣٦ \times ٨$

$= ٩٦ \pi$ سم^٣ #

▪ الدوران حول الوتر $\overleftrightarrow{٩جـ}$
ينتج مخروطين قاعدتهما المشتركة
هي نصف قطرها من خلال الشكل
التالي

△ ٩ب جـ القائم في ب
$٩جـ = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$سم

من نظرية اقليدس
$ب م = نق = \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤,٨$ سم

← $نق_١ = ٤,٨$ سم
$ل_١ = ٨$ سم
$ع_١ = \sqrt{(٨)^٢ - (٤,٨)^٢} = ٦,٤$سم
← $نق_٢ = ٤,٨$ سم
$ل_٢ = ٦$ سم
$ع_٢ = \sqrt{(٦)^٢ - (٤,٨)^٢} = ٣,٦$ سم

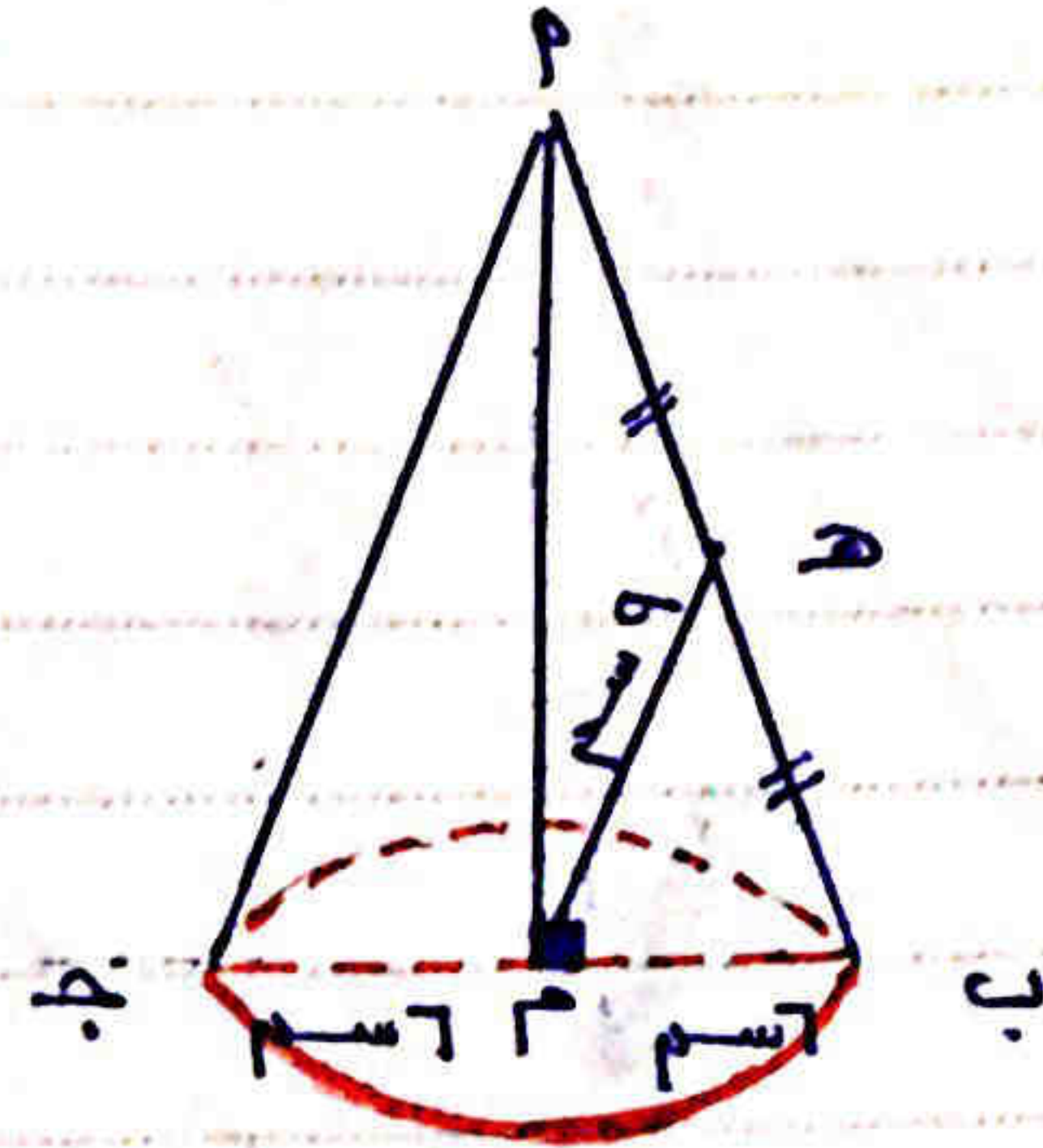
▪ الحجم:
$= \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٦,٤$
$+ \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٣,٦$

$= ٧٦,٨ \pi$ سم^٣ #

Scanned with CamScanner

(٢١) أوجد المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط الدائري القائم بالشكل التالي :

الحل

∵ Δ م ب م قائم في م

، م هـ متوسط خارج من رأس القائمة حيث هـ منتصف م ب

∴ م ب = ٢ هـ م = ٢×٩ = ١٨سم

∴ ل = ١٨سم ، نق = ٦سم

• ع = $\sqrt{(١٨)^٢ - (٦)^٢}$

= $١٢\sqrt{٢}$ سم

ب المساحة الجانبية

= π ل نق

= π × ١٨ × ٦

= ١٠٨ π سم^٢ #

ب المساحة الكلية :

= ١٠٨ π + π × $(٦)^٢$

= ١٤٤π سم^٢ #

ب الحجم :

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٦)^٢$ × $١٢\sqrt{٢}$

= $١٤٤\sqrt{٢}$ π سم^٣ #

Scanned with CamScanner

(٢٢) في الشكل التالي :

أ ، ب كأسان للشراب أيهما سعته أكبر ؟

أوجد الفرق بين سعتيهما .

الحل

▪ نق١ = ٥,٥ سم ، ع١ = ١١سم

∴ سعة الأول = $\frac{1}{3} \times \pi \times (5,5)^2 \times 11$

= $\frac{275}{12} \pi$ سم^3

▪ نق٢ = ٥,٥ سم ، ع٢ = ٥سم

∴ سعة الثاني = $\frac{1}{3} \times \pi \times (5,5)^2 \times 5$

= $\frac{605}{12} \pi$ سم^3

∴ سعة الثاني > سعة الأول

▪ الفرق بين سعتيهما :

= $\frac{605}{12} \pi - \frac{275}{12} \pi = \frac{55}{2} \pi$ سم^3

(٢٣) تغلف الألبان المثلجة في مخروط دائري قائم بطبقة قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ١٢سم ، ومساحته ١٥٠ سم^2 بحيث يتلامس نصفا قطر دائرته م ب ، م جـ أوجد ارتفاع المخروط

الحل

▪ القطاع

نق = ١٢سم ، ل = ؟

مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

$150 = \frac{1}{2} \times$ ل $\times 12$

∴ ل = ٢٥ سم

▪ المخروط

نق (للقطاع) = ل (للمخروط)

∴ ل = ١٢ سم

ل (للقطاع) = 2π نق (قاعدة المخروط)

$25 = 2 \times \pi \times$ نق

∴ نق ≃ ٤ سم

▪ ع = $\sqrt{(12)^2 - (4)^2} \simeq 11,3$ سم

Scanned with CamScanner

(٢٤) غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨سم، وارتفاعه ٢٠سم، احسب مساحته لأقرب سم². ($ط = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

- محيط القاعدة = ٢ ط نق

$٨٨ = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق

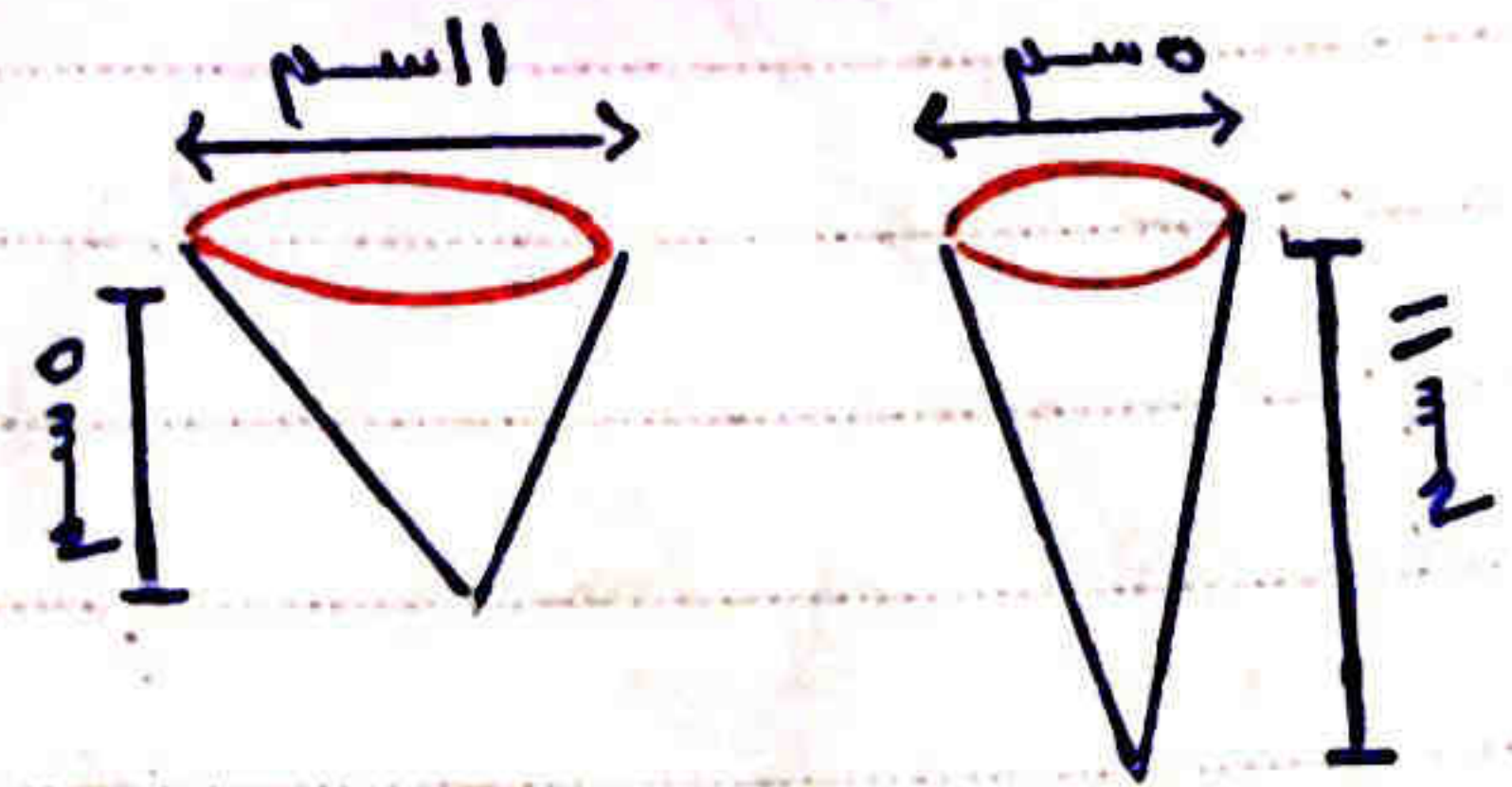
∴ نق = ١٤سم

- ل = $\sqrt{(١٤)^٢ + (٢٠)^٢}$ = ٢٤سم

- المساحة الجانبية

= ط ل نق

= $\frac{٢٢}{٧} \times ٢٤ \times ١٤$

= ١٠٥٦سم² #

(٢٥) مخروط دائري قائم حجمه ١٠٠سم³ أوجد حجمه عندما:

(أ) يتضاعف ارتفاعه.

(ب) يتضاعف طول نصف قطره.

(جـ) يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره

الحل

- الحجم = $\frac{١}{٣} \times ط \times (نق)^٢ \times ع$

(أ) يتضاعف الارتفاع

∴ $\frac{١}{٣} \times ط \times (نق)^٢ \times ٢ع$ = ٢٠٠سم³

∴ الحجم = ٢٠٠سم³

(ب) يتضاعف نصف القطر

∴ $\frac{١}{٣} \times ط \times (٢نق)^٢ \times ع = (٢)^٢ \times ١٠٠$

∴ الحجم = ٤٠٠سم³

(جـ) يتضاعف الارتفاع وطول نصف القطر

∴ الحجم = ٨٠٠ سم³

Scanned with CamScanner

(٢٦) مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢سم وقياس زاوية رأسه ٢هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ أوجد مساحته الكلية بدلالة π

الحل

من فيثاغورث:

$٢٥س^2 = ٩س^2 + ١٤٤$

$١٦س^2 = ١٤٤ \Leftarrow س^2 = ٩$

$\therefore س = ٣$

لذا فإن:

ل = ٥س = ٥ × ٣ = ١٥سم

نق = ٣س = ٣ × ٣ = ٩سم

ع = ١٢سم

$\therefore$ المساحة الكلية:

$= \pi$ ل نق $+ \pi$ نق$^2 = \pi$ نق (ل + نق)

$= \pi \times ٩ \times (١٥ + ٩) = ٢١٦\pi$ سم^2

(٢٧) يمثل الشكل التالي شبكة لمجسم مخروط قائم مكونة من قطاع دائري مساحته ٢٠π سم^2 وطول قوسه $\overset{\frown}{أجب} = ٨\pi$ سم فأوجد ارتفاع المخروط؟

الحل

▪ ل (للقطاع) = ٢π نق (قاعدة المخروط)

$٨\pi = ٢\pi$ نق

$\therefore$ نق = ٤سم (للمخروط)

▪ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

$٢٠\pi = \frac{١}{٢} \times ٨\pi \times$ نق

$\therefore$ نق = ٥سم للقطاع

$\therefore$ ل = ٥سم (للمخروط)

▪ ع = $\sqrt{ل^2 - نق^2} = \sqrt{٢٥ - ١٦}$

= ٣سم #

Scanned with CamScanner

٤ الدائرة :

- هي مجموعة نقاط المستوي والتي تبعد بُعداً ثابتاً (نق) عن نقطة ثابتة (م).
  - ← م : مركز الدائرة
  - ← نق : نصف قطر الدائرة

- الصور المختلفة لمعادلة الدائرة :

⟵ **الصورة القياسية :**

$$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$$

حيث :

- ← م = (د ، هـ)
- ← نق (نصف القطر)
- ← نق > صفر

⟵ **الصورة العامة :**

$$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + جـ = 0$$

حيث :

- ← م = ($\frac{-1}{2}$ × معامل س ، $\frac{-1}{2}$ × معامل ص)
  = (د ، هـ)
- ← ل = -د ، ك = -هـ
- ← نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$
- ← جـ = $ل^2 + ك^2 - نق^2$

- لكي تستطيع تحديد ما إذا كانت المعادلة العامة تمثل معادلة دائرة أم لا تأكد من تحقق **الشروط التالية :**
  - ← أن تكون المعادلة من الدرجة الثانية في س ، ص
  - ← أن تخلو المعادلة من الحد المشتمل على س ص
  - ← معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = 1
  - ← أن يتحقق الشرط : $ل^2 + ك^2 - جـ > 0$.

- **نصيحة يا برنس :**

لما تجيب المركز ونصف القطر من المعادلة العامة تأكد أن معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = 1 خلاف ذلك قسم عليه أو اضرب في مقلوب المضروب.

- **للتوضيح :**

← إذا كان م = (-3 ، 2)

فإن ← ل = 3 ، ك = -2

- **للتحويل إلى مقدار مربع كامل :**

← مثلاً :

$$س^2 - 10س = (س - \frac{10}{2})^2 - (\frac{10}{2})^2$$
$$= (س - 5)^2 - 25$$

$$ص^2 - 8ص = (ص - \frac{8}{2})^2 - (\frac{8}{2})^2$$
$$= (ص - 4)^2 - 16$$

Scanned with CamScanner

← حالات خاصة على معادلة الدائرة:

- معادلة الدائرة التي مركزها:

← نقطة الأصل:

$س^2 + ص^2 = نق^2$

← تمر بنقطة الأصل:

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص = صفر$

∴ $جـ = صفر$

- معادلة الدائرة التي تقع مركزها على محور:

← السينات: $س^2 + ص^2 + 2ل س + جـ = صفر$

← الصادات: $س^2 + ص^2 + 2ك ص + جـ = صفر$

- معادلة الدائرة التي تمس:

← محور السينات:

∴ $نق = |ك|$ ، $جـ = ل^2$

← محور الصادات:

∴ $نق = |ل|$ ، $جـ = ك^2$

← محوري الاحداثيات:

∴ $نق = |ل| = |ك|$

، $جـ = ل^2 = ك^2$

← ملاحظات مهمة بغباء:

- اذا كانت معادلة الدائرة هي:

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

لتحديد موضع النقطة أ $(س_1 ، ص_1)$ بالنسبة للدائرة نعوض في المعادلة السابقة عن $س = س_1$ ، $ص = ص_1$ فاذا كانت:

$(س_1 - د)^2 + (ص_1 - هـ)^2$

← $= نق^2$ ∴ النقطة أ تقع على الدائرة

← $> نق^2$ ∴ النقطة أ تقع خارج الدائرة

← $< نق^2$ ∴ النقطة أ تقع داخل الدائرة

- اذا أعطاك مركز الدائرة م $= (س_1 ، ص_1)$ وكان المطلوب تحديد موضع النقطة أ $(س_2 ، ص_2)$ بالنسبة للدائرة التي طول نصف قطرها (نق) فاذا كان:

← $\overline{م أ} = نق$ ∴ أ تقع على الدائرة

← $\overline{م أ} > نق$ ∴ أ تقع خارج الدائرة

← $\overline{م أ} < نق$ ∴ أ تقع داخل الدائرة

متنساش يا معلم:

$\overline{م أ} = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

- ∆ القائم الزاوية معادلة الدائرة المارة برؤوسه مركزها يقع في منتصف الوتر

Scanned with CamScanner

⬅ **العلاقة بين دائرتين:**

- لو معانا دائرتين مركزيهما: م، ن وطولا نصفي قطريهما: نق١، نق٢ فإنه:

← $\overline{مn} >$ نق١ + نق٢
∴ الدائرتان متباعدتان

← $\overline{مn} <$ نق١ − نق٢
∴ الدائرتان متداخلتان

← $\overline{مn} =$ نق١ + نق٢
∴ الدائرتان متماستان من الخارج

← $\overline{مn} =$ نق١ − نق٢
∴ الدائرتان متماستان من الداخل

← $\overline{مn} =$ صفر
∴ الدائرتان متحدتا المركز

← نق١ − نق٢ $< \overline{مn} <$ نق١ + نق٢
∴ الدائرتان متقاطعتان

الخلاصة

$\overline{مn}$ ←: صفر | نق١ − نق٢ | نق١ + نق٢

تداخل | تقاطع | تباعد

متحدتا المركز | متماستان من الداخل | متماستان من الخارج

⬅ **مساحة كل من:**

- **المضلع المنتظم:**

← م $= \frac{ن}{٤} \times$ س$^٢ \times$ ظا $(٩٠ - \frac{١٨٠}{ن})$

- **للمضلع المنتظم الذي تمر برؤوسه دائرة:**

← م $= \frac{ن}{٢} \times$ نق$^٢ \times$ جا $(\frac{٣٦٠}{ن})$

حيث:

ن ← عدد الأضلاع ، س ← طول الضلع

⬅ **طول العمود المرسوم من النقطة (س١ ، ص١) على المستقيم:**
أس + ب ص + جـ = ٠ يعطى بالقانون:

$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

⬅ إذا كان:

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

فإن:

← $\overline{أب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

← **منتصف $(\overline{أب})$** $= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

** تمارين محلولة **

① أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢،٣) وطول نصف قطرها ٧ وحدات

الحل

نق = ٧ ، م = (٢،٣)

∴ $(س-٢)^{2} + (ص-٣)^{2} = (٧)^{2}$

② أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٤،−٢) وطول قطرها ١٠ وحدات

الحل

نق = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ ، م(٤،−٢)

∴ $(س-٤)^{2} + (ص+٢)^{2} = (٥)^{2}$

③ أوجد احداثي مركز الدائرة وطول نصف قطرها حيث:
$(س-٢)^{2} + (ص+٥)^{2} = ٥^{2}$

الحل

م = (٢،−٥)

نق = ٥ وحدات طول

④ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م(٣،−٢) وتمر بالنقطة ﻫ(−١،١)

الحل

نق = $\sqrt{(٣+١)^{2} + (-٢-١)^{2}}$

= ٥ وحدات طول

∴ $(س-٣)^{2} + (ص+٢)^{2} = (٥)^{2}$

Scanned with CamScanner

⑤ أوجد معادلة الدائرة التي طول قطرها $\overline{أب}$ حيث: أ(٤، -١)، ب(-٢، ١)

الحل

$م = \left(\frac{٤-٢}{٢}، \frac{-١+١}{٢}\right) = (١، ٠)$

$أب = \sqrt{(٤+٢)^٢ + (-١-١)^٢} = ٢\sqrt{١٠}$

$\therefore نق = \frac{أب}{٢} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٢} = \sqrt{١٠}$

$\therefore (س-١)^٢ + ص^٢ = (\sqrt{١٠})^٢$

أي: $(س-١)^٢ + ص^٢ = ١٠$

⑥ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-٢، ٣) وتمر بالنقطة (٤، ٥)

الحل

$نق = \sqrt{(-٢-٤)^٢ + (٣-٥)^٢}$

$= ٢\sqrt{١٠}$

$م = (-٢، ٣)$

$\therefore (س+٢)^٢ + (ص-٣)^٢ = (٢\sqrt{١٠})^٢$

أي: $(س+٢)^٢ + (ص-٣)^٢ = ٤٠$

⑦ أوجد مساحة الدائرة التي معادلتها $(س-٥)^٢ + (ص+٤)^٢ = ٧$

الحل

$نق = \sqrt{٧}$

$\therefore المساحة = \pi نق^٢$

$= \pi (\sqrt{٧})^٢$

$= ٧\pi$ #

طبعاً وحدة مساحة

⑧ أوجد محيط الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٨$

الحل

$نق = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

$\therefore المحيط = ٢\pi نق$

$= ٢ \times \pi \times ٢\sqrt{٢}$

$= ٤\sqrt{٢}\ \pi$ وحدة طول #

Scanned with CamScanner

(٩) أوجد مركز الدائرة:
$س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص + ٩ = ٠$
ثم أوجد طول نصف قطرها

الحل

تأكد أولاً أن معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢} = ١$

∴ (د، هـ) = (−½ معامل س، −½ معامل ص)

∴ م = $(-\frac{1}{2} \times -٦ ، -\frac{1}{2} \times ٨) = (٣، -٤)$

∴ نق = $\sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - حـ}$

$= \sqrt{٩ + ١٦ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$ #

(١٠) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، −٤) وتمس محور السينات

الحل

تمس محور السينات:

∴ نق = $|-٤| = ٤$

∴ $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٦$

ممكن نكتبها في الصورة العامة:

ل = −٥ ، ك = ٤

∴ $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + ل^{٢} = ٠$

∴ $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

(١١) في الشكل التالي أوجد معادلة الدائرة.

الحل

∴ المستقيمان س = ٣ ، س = ٧ يمسان الدائرة ∴ طول القطر = $|٧ - ٣| = ٤$

ومنها يا معلم ← نق = ٢ وحدة طول

∴ م = (٥، ص) [٥ تقع منتصف ٧، ٣]

وتقع على المستقيم: ص = ٣س − ٥

∴ تحقق معادلته

∴ عندما س = ٥ ← ص = ٣ × ٥ − ٥ = ١٠

ومنها م = (٥، ١٠)

∴ $(س - ٥)^{٢} + (ص - ١٠)^{٢} = ٤$

أو

ل = −٥ ، ك = −١٠ ، نق = ٢

∴ جـ = $ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢} = ٢٥ + ١٠٠ - ٤ = ١٢١$

∴ $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ٢٠ص + ١٢١ = ٠$

Scanned with CamScanner

(١٢) أوجد احداثي المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

- $(\text{س}+٤)^٢ + \text{ص}^٢ = ٩$

الحل

م = (د ، هـ) = (−٤ ، ٠)

نق = $\sqrt{٩}$ = ٣ وحدات طول

- $\text{س}^٢ + (\text{ص}+٧)^٢ = ٢٤$

الحل

م = (٠ ، −٧)

نق = $\sqrt{٢٤}$ = $٢\sqrt{٦}$ وحدة طول

- $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٤\text{س} + ٦\text{ص} - ١٢ = ٠$

الحل

← م = $(-\frac{١}{٢} \times ٤ ، -\frac{١}{٢} \times ٦)$

= (−٢ ، −٣)

← نق = $\sqrt{٤ + ٩ - (-١٢)}$ = ٥ وحدات

- $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٨\text{س} = ١٢$

الحل

نصفر المعادلة أولاً:

∴ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٨\text{س} - ١٢ = ٠$

← م = (٤ ، ٠)

← نق = $\sqrt{١٦ + ٠ - (-١٢)} = \sqrt{٢٨}$

= $٢\sqrt{٧}$ وحدة طول

(١٣) أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها = ٣ وحدات طول ومعادلتا قطرين فيها هما:

$\text{س} + \text{ص} = ٢$ ، $٢\text{س} - \text{ص} = ٧$

الحل

المركز (م) هو نقطة تقاطع القطرين

$\text{س} + \text{ص} = ٢$

$٢\text{س} - \text{ص} = ٧$

بالجمع

∴ $٣\text{س} = ٩ \Leftarrow \text{س} = ٣$

∴ $\text{ص} = -١$

- م = (٣ ، −١) ، نق = ٣

← المعادلة هي:

$(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ = ٩$ #

Scanned with CamScanner

⑭ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م = (٢ ، ٣) والمستقيم: ٣س + ٤ص + ٢ = ٠ مماساً لها عند نقطة م

الحل

$$\text{نق} = \text{ل} = \frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$$

= ٤ وحدات طول

∴ المعادلة هي:

$$(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٣)^٢ = ١٦ \quad \#$$

⑮ أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحل

تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

∴ م = (٥ ، ٣) أو م = (−٥ ، ٣)

، نق = ٥ وحدات في الحالتين

عندما:

⇐ م = (٥ ، ٣)

$$(\text{س} - ٥)^٢ + (\text{ص} - ٣)^٢ = ٢٥$$

⇐ م = (−٥ ، ٣)

$$(\text{س} + ٥)^٢ + (\text{ص} - ٣)^٢ = ٢٥$$

لاحظ نفس المثال السابق لو قال تمس محور السينات في النقطة (٣ ، ٠):

∴ م = (٣ ، ٥) أو م = (٣ ، −٥)

⑯ أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحورين ومركزها (−٤ ، ٤)

الحل

∵ الدائرة تمس المحورين

∴ نق = |ل| = |ك| = ٤

∴ المعادلة تكون:

$$(\text{س} + ٤)^٢ + (\text{ص} - ٤)^٢ = ١٦ \quad \#$$

⑰ أوجد معادلة الدائرة التي نهايتي قطر فيها: (٣ ، ٢) ، (٥ ، −٦)

الحل

$$\text{م} = \left(\frac{٣ + ٥}{٢} ، \frac{٢ - ٦}{٢}\right) = (٤ ، -٢)$$

البعد بين أي نقطة والمركز

(٣ ، ٢) ، (٤ ، −٢)

$$\text{نق} = \sqrt{(٣ - ٤)^٢ + (٢ + ٢)^٢} = \sqrt{١٧}$$

∴ المعادلة هي:

$$(\text{س} - ٤)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ = ١٧ \quad \#$$

Scanned with CamScanner

⑱ أوجد معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة:

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ١٢\text{س} + ٦\text{ص} + ٢٠ = ٠$

بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢)

الحل

▪ $م_1 = (-\frac{1}{2} \times -١٢ ، \frac{1}{2} \times ٦) = (٦ ، -٣)$

$نق = \sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠} = ٥$ وحدات

▪ $م_2 = (٦ + ٢ ، -٣ - ٢) = (٨ ، -٥)$

نق = ٥ وحدات

∴ المعادلة المطلوبة هي:

$(\text{س} - ٨)^2 + (\text{ص} + ٥)^2 = ٢٥$

لاحظ:

← نق في الحالتين متساوي

← المركز فقط حدث له انتقال

---

⑲ أوجد مركز الدائرة التي معادلتها

$(\text{س} + ٢)^2 + \text{ص}^2 + ٢\text{ص} = ٠$

الحل

اكمال مربع أسرع حل:

$(\text{س} + ٢)^2 + (\text{ص} + ١)^2 - ١ = ٠$

∴ $(\text{س} + ٢)^2 + (\text{ص} + ١)^2 = ١$

← م = (−٢ ، −١) #

اللهم ارحم والدي

اللهم اجعل قبر والدي روضة من رياض الجنة

Scanned with CamScanner

⑳ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها : م (٥ ، ٤) وتمس كل من؟

▪ المستقيم س = ٢

الحل

∵ الدائرة تمس المستقيم س = ٢

∴ نق = |٥ − ٢| = ٣ وحدات طول

← المعادلة هي :

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩ #

▪ المستقيم ص = ٢

الحل

∵ الدائرة تمس المستقيم ص = ٢

∴ نق = |٤ − ٢| = ٢ وحدة طول

← المعادلة هي :

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٤ #

㉑ من خلال الشكل المقابل :

طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} عند النقطة (٠ ، ٢نق) تساوي ....

الحل

المماس = $\sqrt{(٢نق)^{٢} - (نق)^{٢}}$

= $\sqrt{٤نق^{٢} - نق^{٢}}$

= $\sqrt{٣نق^{٢}}$

= $\sqrt{٣}$ نق #

Scanned with CamScanner

(٢٢) أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م يقع في الربع الأول وطول نصف قطرها يساوي ٣ وحدات طول والمستقيمان: س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها؟

الحل

المستقيمان المماسان هما:

← س = ١ ∴ س − ١ = ٣ ⟸ س = ٤

← ص = ٢ ∴ ص − ٢ = ٣ ⟸ ص = ٥

∴ المركز م = (٤ ، ٥)

المعادلة هي:

(س − ٤)^2 + (ص − ٥)^2 = ٩ #

"كن بسيطاً مادمت حياً"

(٢٣) أوجد لأقرب سم² مساحة سطح شكل خماسي منتظم تمر برؤوسه الدائرة س² + ص² + ٦س − ١٢ص + ٥ = ٠ علماً بأن كل وحدة في المستوى الاحداثي تمثل ٥سم؟

الحل

م = (½ × ٦ ، ½ × −١٢)

= (−٣ ، ٦)

نق = $\sqrt{٩ + ٣٦ - ٥}$ = $\sqrt{٤٠}$

← مساحة الشكل الخماسي المرسوم داخل دائرة:

= $\frac{ن}{٢}$ × نق² × جا ($\frac{٣٦٠}{ن}$)

= $\frac{٥}{٢}$ × ($\sqrt{٤٠}$)² × جا ($\frac{٣٦٠}{٥}$)

≃ ٩٥,١ سم²

∴ المساحة المطلوبة

≃ ٩٥,١ × ٢٥ ≃ ٢٣٧٨ سم²

ل الوحدة = ٥سم

∴ الوحدة المربعة = ٢٥ سم²

(٢٤) صمم مهندس معماري مبنى قاعدته على شكل ثماني منتظم تمر رؤوسه بالدائرة:

س² + ص² − ٤س + ١٢ص − ٦٠ = ٠

احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة؟

الحل

- م = (−½ × −٤ ، −½ × ١٢)
  = (٢ ، −٦)
- ل = −٢ ، ك = ٦ ، جـ = −٦٠

∴ نق = √(٤ + ٣٦ − (−٦٠))
= ١٠ وحدة طول

- مساحة الثماني المنتظم الذي تمر برؤوسه الدائرة:

= ٨/٢ × (١٠)² × جا ٣٦٠/٨

= ٢٠٠ √٢

≃ ٢٨٣ وحدة مربعة #

(٢٥) بين أي مما يأتي تكون الدائرتان متطابقتان أم لا؟ ولماذا؟

- س² + ص² − ٤س + ٨ص = ٠
- ، س² + ص² − ١٢ص + ١٦ = ٠

الحل

- الدائرة الأولى:

م = (−½ × −٤ ، −½ × ٨) = (٢ ، −٤)

∴ ل = −٢ ، ك = ٤ ، جـ = ٠

← نق١ = √(٤ + ١٦ − ٠) = √٢٠

- الدائرة الثانية:

م = (−½ × ٠ ، −½ × −١٢) = (٠ ، ٦)

∴ ل = ٠ ، ك = −٦ ، جـ = ١٦

← نق٢ = √(٠ + ٣٦ − ١٦) = √٢٠

∴ نق١ = نق٢ ← الدائرتان متطابقتان

- س² + ص² − ٢س + ٤ص − ٣ = ٠
- ، س² + ص² + ٦س − ١١ = ٠

الحل

نحل بإكمال المربع من باب التغيير

← (س − ١)² − ١ + (ص + ٢)² − ٤ − ٣ = ٠

∴ (س − ١)² + (ص + ٢)² = ٨

∴ نق١ = √٨ = ٢√٢

← (س + ٣)² − ٩ + ص² − ١١ = ٠

∴ (س + ٣)² + ص² = ٢٠

∴ نق٢ = √٢٠ = ٢√٥

∴ نق١ ≠ نق٢ ← الدائرتان غير متطابقتان

Scanned with CamScanner

(٦٢) بين أياً من المعادلات الآتية تمثل معادلة دائرة:

■ $٢س^٢ - س ص + ٢ص^٢ + ٥س - ص = ٠$

الحل

يوجد حد مشتمل على س ص

∴ ليست معادلة دائرة

■ $س^٢ + ٣ص^٢ - ٢س + ٤ص + ٥ = ٠$

الحل

معامل $س^٢ = ١$ ، معامل $ص^٢ = ٣$

∴ معامل $س^٢ \neq$ معامل $ص^٢ \neq ١$

∴ ليست معادلة دائرة

■ $س^٢ + ص^٢ + ٧س - ص + ٨ = ٠$

الحل

← معامل $س^٢ =$ معامل $ص^٢ = ١$

← لا يوجد حد مشتمل على س ص

← $ل = \frac{٧}{٢}$ ، $ك = \frac{-١}{٢}$ ، $ج = ٨$

$ل^٢ + ك^٢ - ج = \frac{٤٩}{٤} + \frac{١}{٤} - ٨$

$= \frac{٩}{٢} > ٠$

∴ المعادلة هي معادلة دائرة #

■ $٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٣ص - ٨ = ٠$

الحل

قسم على ٢

∴ $س^٢ + ص^٢ + \frac{٣}{٢}ص - ٤ = ٠$

← معامل $س^٢ =$ معامل $ص^٢ = ١$

← لا يوجد حد مشتمل على س ص

← $ل = ٠$ ، $ك = \frac{٣}{٢}$ ، $ج = -٤$

∴ $ل^٢ + ك^٢ - ج = ٠ + \frac{٩}{٤} + ٤$

$= \frac{٢٥}{٤} > ٠$

∴ ⟸ معادلة دائرة #

■ $\frac{١}{٤}س^٢ + \frac{١}{٤}ص^٢ + س - ٨ = ٠$

الحل

اضرب في ٤

∴ $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٣٢ = ٠$

← معامل $س^٢ =$ معامل $ص^٢ = ١$

← لا يوجد حد مشتمل على س ص

← $ل = ٢$ ، $ك = ٠$ ، $ج = -٣٢$

∴ $ل^٢ + ك^٢ - ج = ٤ + ٠ + ٣٢$

$= ٣٦ > ٠$

∴ ⟸ معادلة دائرة #

Scanned with CamScanner

(٢٧) س: أي النقاط التالية تنتمي إلى الدائرة د التي معادلتها: $(س - ٦)^2 + (ص + ١)^2 = ٢٥$ ، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث:

أ (٣،٩) ، ب (٧،٥) ، جـ (٣،٣) ، و (٢،-٣)

الحل

- أ (٩،٣)

∴ $(٩ - ٦)^2 + (٣ + ١)^2$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥ =$ نق^2

∴ أ تقع على الدائرة #

- ب (٧،٥)

∴ $(٧ - ٦)^2 + (٥ + ١)^2$

$= ١ + ٣٦ = ٣٧ >$ نق^2

∴ ب تقع خارج الدائرة

- جـ (٣،٣)

∴ $(٣ - ٦)^2 + (٣ + ١)^2$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥ =$ نق^2

∴ جـ تقع على الدائرة

- و (٢،-٣)

∴ $(٢ - ٦)^2 + (-٣ + ١)^2 = ٢٠ <$ نق^2

∴ و تقع داخل الدائرة

(٢٨) س: ما إذا كانت الدائرتان:

د١ : $س^2 + ص^2 - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠$

د٢ : $س^2 + ص^2 + ١٤س + ١٠ص - ٢٦ = ٠$

متماستان من الخارج أم لا ولماذا؟

الحل

- م١ = $(\frac{-١}{٢} \times -١٠ ، \frac{-١}{٢} \times -٨)$

$= (٥ ، ٤)$

ل = -٥ ، ك = -٤ ، جـ = ١٦

- نق١ = $\sqrt{٢٥ + ١٦ - ١٦} = ٥$ وحدات

- م٢ = $(\frac{-١}{٢} \times ١٤ ، \frac{-١}{٢} \times ١٠)$

$= (-٧ ، -٥)$

ل = ٧ ، ك = ٥ ، جـ = -٢٦

- نق٢ = $\sqrt{٤٩ + ٢٥ + ٢٦} = ١٠$ وحدات

نق١ + نق٢ = ٥ + ١٠ = ١٥ وحدة طول

م١م٢ = $\sqrt{(٥ + ٧)^2 + (٤ + ٥)^2}$

= ١٥ وحدة طول

∴ م١م٢ = نق١ + نق٢

∴ الدائرتان متماستان من الخارج #

Scanned with CamScanner

٢٩) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة اذا كانت:
مركزها م (٥ ، ٣) وتمس المستقيم المار بالنقطتان؟ : (٣ ، ٧) ، (-١ ، ٣)

الحل

ميل المستقيم $= \frac{٧ - ٣}{٣ - -١} = ١$

المعادلة للميل:

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$

$\frac{ص - ٧}{س - ٣} = ١$

∴ س − ٣ = ص − ٧
ومنها س − ص + ٤ = ٠

نق = ل $= \frac{|١ \times ٥ - ١ \times ٣ + ٤|}{\sqrt{١ + ١}}$

$= ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

∴ $(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = (٣\sqrt{٢})^٢$

أي أن:

$س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٦ص + ١٦ = ٠$

خلي بالك من نفسك يا ني عيني

٣٠) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي تمر بالنقطتان:
أ (٦ ، ٢) ، ب (٠ ، -١) والمماسات لها عند أ ، ب متوازيات.

الحل

المماسان متوازيان عند أ ، ب
∴ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة

∴ م $= (\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{٢ - ١}{٢}) = (٣ ، \frac{١}{٢})$

∴ نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{(٦ - ٣)^٢ + (٢ - \frac{١}{٢})^٢}$

$= \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$

∴ $(س - ٣)^٢ + (ص - \frac{١}{٢})^٢ = (\frac{٣\sqrt{٥}}{٢})^٢$

أي أن:

$س^٢ + ص^٢ - ٦س - ص - ٢ = ٠$ #

Scanned with CamScanner

(٣١) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها يقع على محور السينات وتمر بالنقطتين: (٢، ٠)، (٨، ٠)

الحل

▪ م = $\left(\frac{٢+٨}{٢}، \frac{٠+٠}{٢}\right)$ = (٥، ٠)

▪ نق = $\sqrt{(٢-٥)^٢ + (٠-٠)^٢}$ = ٣ وحدات

ل = -٥ ، ك = ٠ ، نق = ٣

▪ جـ = ٢٥ + ٠ - ٩ = ١٦

∴ $س^٢ + ص^٢ - ١٠س + ١٦ = ٠$ #

(٣٢) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها يقع على محور الصادات وتمر بالنقطتين: (٠، ١)، (٠، ٧)

الحل

▪ م = $\left(\frac{٠+٠}{٢}، \frac{١+٧}{٢}\right)$ = (٠، ٤)

▪ نق = $\sqrt{(٠-٠)^٢ + (١-٤)^٢}$ = ٣ وحدات

ل = ٠ ، ك = -٤ ، نق = ٣

▪ جـ = ٠ + ١٦ - ٩ = ٧

∴ $س^٢ + ص^٢ - ٨ص + ٧ = ٠$ #

(٣٣) أوجد طول نصف القطر وكذلك المركز للدائرة التي معادلتها:

$$\begin{vmatrix} س & ت ص \\ ت ص & س \end{vmatrix} - ٤٩ = ٠$$

الحل

بفك المحدد:

(س × س) - (ت ص × ت ص) - ٤٩ = ٠

$س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

$س^٢ + ص^٢ = (٧)^٢$

∴ م = (٠، ٠)

، نق = ٧ وحدات طول. #

Scanned with CamScanner

(٣٤) أوجد قيم هـ التي تجعل كلاً منهما بأنها معادلة دائرة:

▪ س² + ص² − ٢س − ٤ص − هـ + ٢ = ٠

الحل

م = (−½ × −٢ ، −½ × −٤) = (١ ، ٢)

∴ ل = −١ ، ك = −٢

الشرط اللازم هو: نق > ٠

ل² + ك² − جـ > ٠

١ + ٤ − (−هـ + ٢) > ٠

٥ + هـ − ٢ > ٠

هـ > −٣

∴ هـ ∈]−٣ ، ∞[

▪ س² + ص² + ٢هـ س − ٦هـ ص − ٢هـ² + ١٢هـ − ٣ = ٠

الحل

م = (−½ × ٢هـ ، −½ × −٦هـ)

= (−هـ ، ٣هـ)

∴ ل = هـ ، ك = −٣هـ

الشرط اللازم هو: نق > ٠

ل² + ك² − جـ > ٠

هـ² + ٩هـ² − (−٢هـ² + ١٢هـ − ٣) > ٠

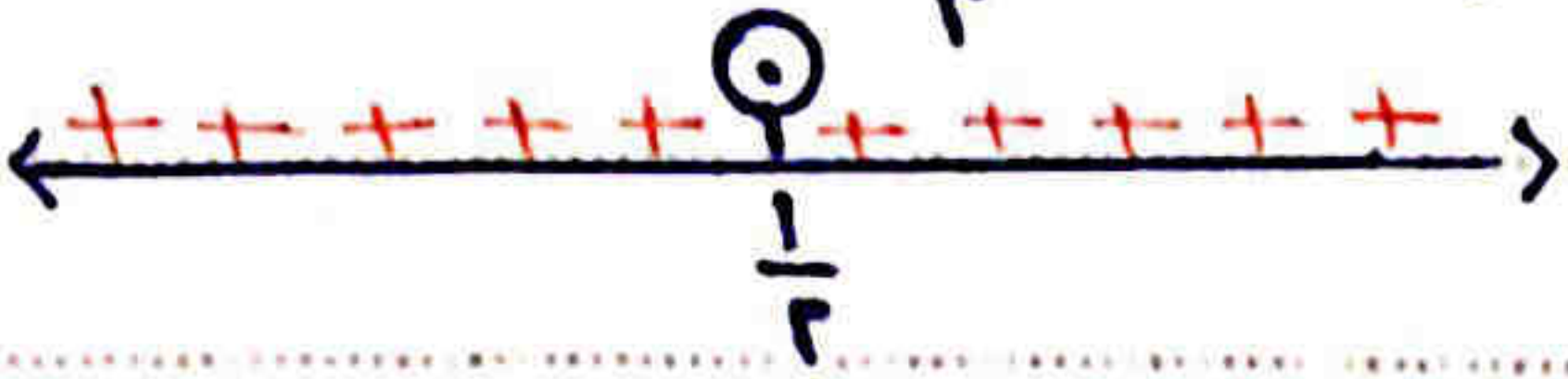
هـ² + ٩هـ² + ٢هـ² − ١٢هـ + ٣ > ٠

١٢هـ² − ١٢هـ + ٣ > ٠

٤هـ² − ٤هـ + ١ > ٠

(٢هـ − ١)² = ٠ ∴ ٢هـ − ١ = ٠

ومنها هـ = ½

∴ هـ ∈ ح − {½} #

(٣٥) اثبت أن المثلث الذي رؤوسه: أ(٨ ، ٠) ، ب(٠ ، ٦) ، جـ(٠ ، ٠) قائم الزاوية ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوسه؟

الحل

ميل أب = (٦ − ٠) / (٠ − ٨) = −٣/٤

ميل ب جـ = (٠ − ٦) / (٠ − ٠) = ٦/٠ (غير معروف)

ميل أ جـ = (٠ − ٠) / (٠ − ٨) = ٠

∵ ميل ب جـ غير معروف ∴ ب جـ يوازي محور ص

∵ ميل أ جـ يساوي صفر ∴ أ جـ يوازي محور س

ومنها أ جـ ⊥ ب جـ ∴ المثلث قائم في جـ

← م = منتصف الوتر أ ب

= ((٨ + ٠)/٢ ، (٠ + ٦)/٢)

= (٤ ، ٣)

← نق = √((٨ − ٤)² + (٠ − ٣)²)

= ٥ وحدات

▪ (س − ٤)² + (ص − ٣)² = ٢٥ #

Scanned with CamScanner

(٣٦) أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها يساوي طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{س}\ \text{جتا}\ \text{هـ} - 2\text{ص}\ \text{جا}\ \text{هـ} - 8 = 0$

ومعادلتا مستقيمين يحويان قطرين فيها هما

$\text{س} + \text{ص} = 0$ ، $\vec{\text{ر}} = (1, 5) + \text{ك}(1, 2)$

الحل

$\text{م} = \left(-\frac{1}{2} \times -2\ \text{جتا}\ \text{هـ} ، -\frac{1}{2} \times -2\ \text{جا}\ \text{هـ}\right)$

$= (\text{جتا}\ \text{هـ} ، \text{جا}\ \text{هـ})$

$\therefore \text{ل} = -\text{جتا}\ \text{هـ} ، \text{ك} = -\text{جا}\ \text{هـ}$

- $\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$

$= \sqrt{\text{جتا}^2\ \text{هـ} + \text{جا}^2\ \text{هـ} - (-8)}$

$= \sqrt{1 + 8} = 3$ وحدات طول

- $\vec{\text{ر}} = (1, 5) + \text{ك}(1, 2)$

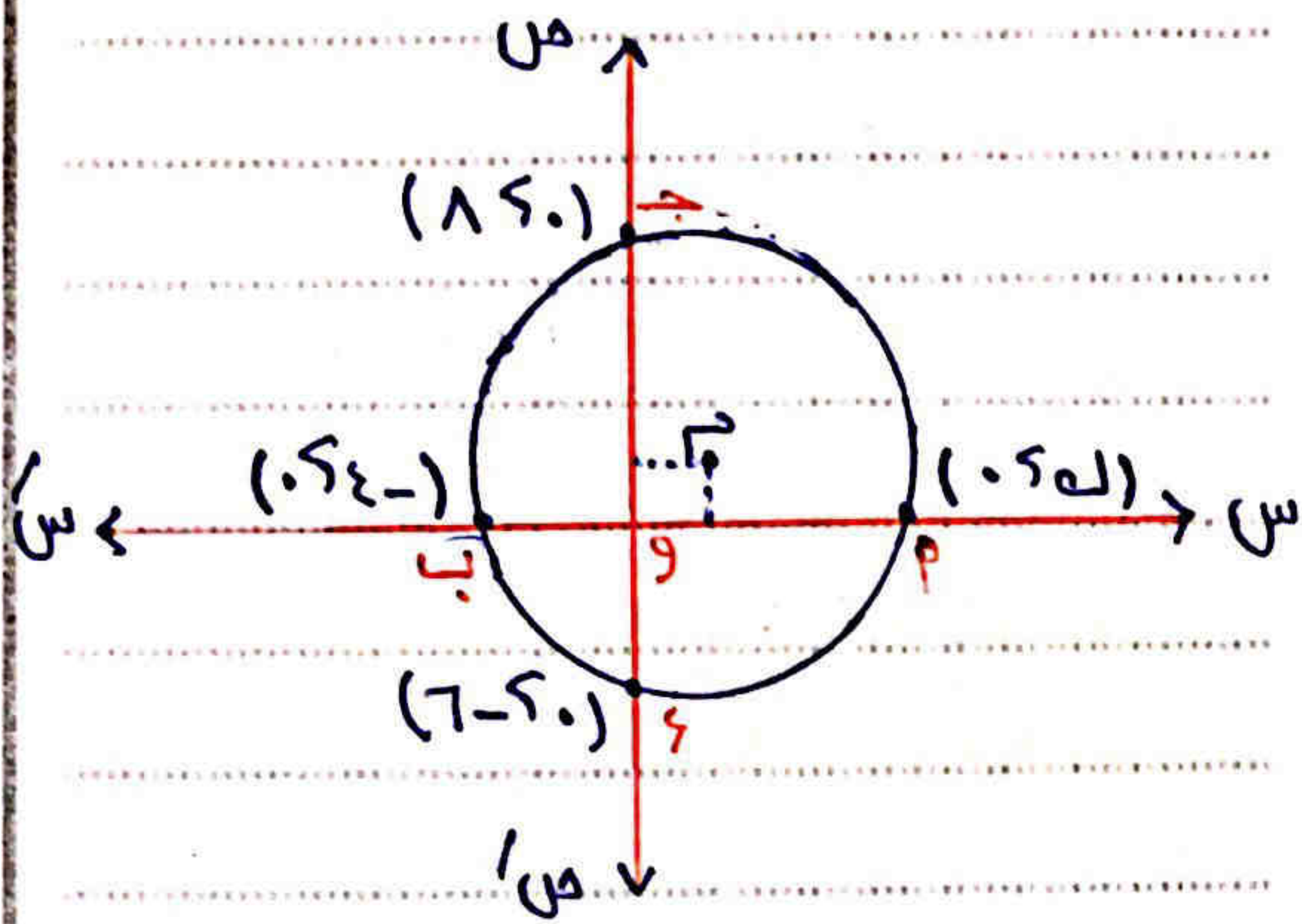
$\therefore \frac{\text{ص} - 5}{\text{س} - 1} = \frac{2}{1} \quad \therefore 2\text{س} - \text{ص} = -3$

، $\text{س} + \text{ص} = 0$

حل المعادلتين السابقتين:

$\therefore \text{س} = -1 ، \text{ص} = 1 \Leftarrow \text{م} = (-1, 1)$

- $(\text{س} + 1)^2 + (\text{ص} - 1)^2 = 9$ #

(٣٧) في الشكل التالي اكتب معادلة الدائرة

الحل

- فالكم أب وتران متقاطعان داخل دائرة

$\text{وأ} \times \text{وب} = \text{وجـ} \times \text{ود}$

$\text{ك} \times 4 = 8 \times 6 \quad \therefore \text{ك} = 12$

- محتاج جبر إحداثي المركز

منتصف $(\overline{\text{أب}})$

$\therefore \text{ـب} = \left(\frac{12 - 4}{2} ، \frac{0 + 0}{2}\right) = (4, 0)$

منتصف $(\overline{\text{جـ د}})$

$\therefore \text{ـب} = \left(\frac{0 + 0}{2} ، \frac{8 - 6}{2}\right) = (0, 1)$

$\leftarrow \text{م} = (4, 1)$

$\leftarrow \text{نق} = \sqrt{(12 - 4)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{65}$

- $\therefore (\text{س} - 4)^2 + (\text{ص} - 1)^2 = 65$ #

Scanned with CamScanner

(٣٨) أوجد حيث م فى المعادلة:

س² + ص² − ٢س + ٤ص + ٢م − ٣ = ٠

فى كل من الحالات الآتية:

■ المعادلة تمثل دائرة

الحل

م = (٢/٢ ، −٤/٢) = (١، −٢)

∴ ل = −١ ، ك = ٢

ل² + ك² − ج > ٠

١ + ٤ − (٢م − ٣) > ٠

٥ − ٢م + ٣ > ٠

−٢م > −٨

م < ٤ ∴ م ∈]−∞، ٤[

■ المعادلة تمثل دائرة تمر بنقطة الأصل:

∴ ج = صفر

٢م − ٣ = ٠

٢م = ٣ ∴ م = ١ ١/٢

■ المعادلة تمثل دائرة تمس محور السينات:

∴ نق = |ك| ، ج = ل²

∴ ٢م − ٣ = ١

٢م = ٤ ⟸ م = ٢

■ المعادلة تمثل دائرة تمس محور الصادات:

∴ نق = |ل| ، ج = ك²

٢م − ٣ = ٤

٢م = ٧ ⟸ م = ٣,٥

■ المعادلة تمثل دائرة تمس المستقيم: ٣س + ٤ص + ١٥ = ٠

∴ نق = |٣س + ٤ص + ١٥| / √(٩ + ١٦)

∴ نق = √(ل² + ك² − ج)

= √(١ + ٤ − ج)

= √(٥ − ج)

√(٥ − ج) = |٣ × ١ + ٤ × −٢ + ١٥| / ٥

طبعاً ج = ٢م − ٣

√(٥ − ٢م + ٣) = ٢

√(٨ − ٢م) = ٢ بالتربيع

٨ − ٢م = ٤ ∴ م = ٢ #

■ القطر = ١٤سم

∴ نق = ٧سم ⟸ نق² = ل² + ك² − ج

٤٩ = ١ + ٤ − ٢م + ٣ ∴ م = ٢١,٥

Scanned with CamScanner

(٣٩) أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١، ٣) ، (٢، −٤) ومركزها يقع على محور السينات؟

الحل

∵ المركز يقع على محور السينات

∴ $س^2 + ص^2 + ٢ل س + جـ = ٠$

عند (١، ٣) ← س = ١ ، ص = ٣

← ٢ل + جـ = −١٠ ← ①

عند (٢، −٤) ← س = ٢ ، ص = −٤

← ٤ل + جـ = −٢٠ ← ②

حل المعادلات ① ، ② نجد أن

ل = −٥ ، جـ = ٠

∴ $س^2 + ص^2 - ١٠س = ٠$ #

← الصورة العامة

■ ممكن نحولها للصورة المناسبة عن طريق إكمال المربع:

$(س - ٥)^2 - ٢٥ + ص^2 = ٠$

∴ $(س - ٥)^2 + ص^2 = ٢٥$ #

(٤٠) احسب قيمة ك التي تجعل الدائرتان

م: $(س + ٢)^2 + (ص + ١١)^2 = ك$

ن: $(س - ٣)^2 + (ص - ١)^2 = ١٦$

متماستان؟

الحل

مركز الأولى = (−٢، −١١) ، نق١ = $\sqrt{ك}$

مركز الثانية = (٣، ١) ، نق٢ = ٤

■ متماستان فقط يعني ممكن من الداخل وممكن من الخارج

← من الخارج:

م ن = نق١ + نق٢

$\sqrt{(-٢-٣)^2 + (-١١-١)^2} = \sqrt{ك} + ٤$

∴ $\sqrt{ك} + ٤ = ١٣$ ⇐ ∴ ك = ٨١

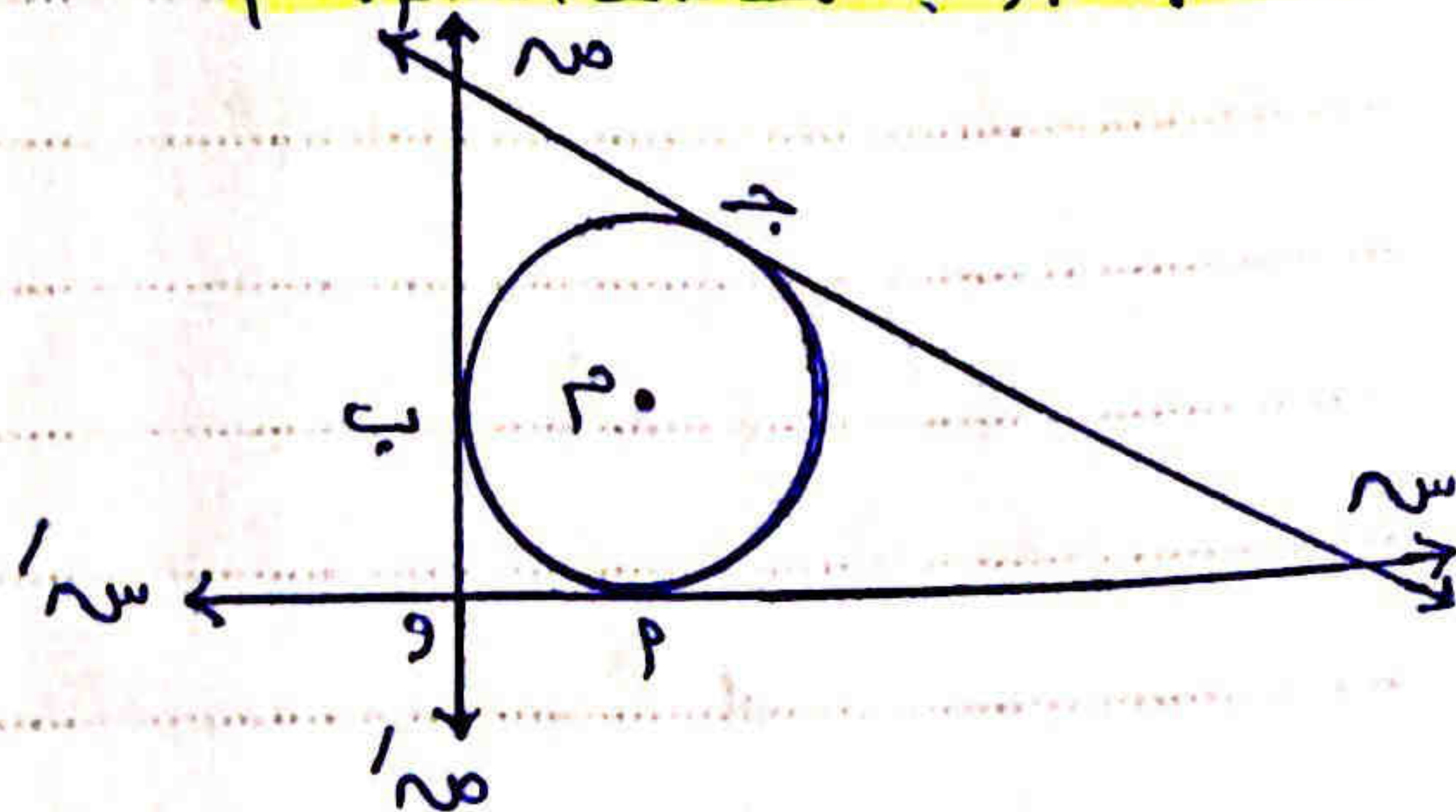
← من الداخل:

م ن = نق١ − نق٢

$\sqrt{(-٢-٣)^2 + (-١١-١)^2} = \sqrt{ك} - ٤$

∴ $\sqrt{ك} - ٤ = ١٣$ ⇐ ∴ ك = ٢٨٩

Scanned with CamScanner

(٤١) الدائرة م تمس محوري الاحداثيات في أ ، ب فإذا كان المستقيم : ٤س + ٣ص − ١٢ = ٠ مماساً للدائرة م عند ج أوجد معادلة الدائرة م

الحل

م = (نق ، نق) [وأ ، وب مماسان من و]

م ج = نق [البعد العمودي]

نق = |٤س + ٣ص − ١٢| ÷ √(١٦ + ٩)

نق = |٤نق + ٣نق − ١٢| ÷ ٥

٥ نق = |٧نق − ١٢|

← ٧نق − ١٢ = ٥نق ∴ نق = ٦

∴ (س − ٦)² + (ص − ٦)² = ٣٦

← ٧نق − ١٢ = −٥نق ∴ نق = ١

∴ (س − ١)² + (ص − ١)² = ١

(٤٢) إذا قطع المستقيم ص = ٢ الدائرة التي معادلتها (س − ٣)² + (ص − ٢)² = ٢٥ في النقطتين أ ، ب فإن أب = ... وحدة طول

الحل

∵ ص = ٢

∴ (س − ٣)² + (٢ − ٢)² = ٢٥

(س − ٣)² = ٢٥

س − ٣ = ٥ أو س − ٣ = −٥

س = ٨ س = −٢

∴ أ = (٨ ، ٢) ، ب = (−٢ ، ٢)

← أب = √((٨ + ٢)² + (٢ − ٢)²)

= ١٠ وحدة طول #

Scanned with CamScanner

(٤٣) اذا كانت:

$(س \quad ص \quad ٢٥) \begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \square$

تمثل معادلة دائرة فان طول نصف قطرها يساوي.......... وحدة طول؟

الحل

$(س \quad ص \quad ٢٥) \begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \square$ ← مصفوفة صفرية

$\therefore (س^٢ + ص^٢ - ١٠٠) = (٠)$

$س^٢ + ص^٢ = ١٠٠$

▪ $نق = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ وحدة طول #

(٤٤) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين م(١، ٣) ، ب(٢، -٤) ويقع مركزها على محور السينات؟

الحل

∵ المركز يقع على محور السينات

$\therefore س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + جـ = ٠$

ومنها ← م = (-ل، ٠)

← عند م(١، ٣)

$١ + ٩ + ٢ل + جـ = ٠$

▪ $٢ل + جـ = -١٠$ ← ①

← عند ب(٢، -٤)

$٤ + ١٦ + ٤ل + جـ = ٠$

▪ $٤ل + جـ = -٢٠$ ← ②

بطرح المعادلتين ① ، ② ينتج أن:

$-٢ل = ١٠ \quad \therefore ل = -٥$

نعوض في المعادلة ①

$٢ \times -٥ + جـ = -١٠ \quad \therefore جـ = ٠$

▪ المعادلة هي:

$س^٢ + ص^٢ - ١٠س = ٠$ #

Scanned with CamScanner

٤٥) اذا كانت معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل هي:

أ س² + ٢ ص² + ٤ س + (أ + ب) س ص − ٨ ص + جـ − ٢ = صفر

فإن طول نصف قطرها = ... وحدة طول

الحل

∵ المعادلة السابقة معادلة دائرة

∴ معامل س² = معامل ص² ، س ص = ٠

∴ ← أ = ٢ ، أ + ب = ٠

∴ ب = −٢

∵ المعادلة السابقة للدائرة تمر بنقطة الأصل

∴ جـ − ٢ = ٠ ← جـ = ٢

فتكون معادلة الدائرة هي:

٢ س² + ٢ ص² + ٤ س − ٨ ص = ٠ (÷ ٢)

س² + ص² + ٢ س − ٤ ص = ٠

ومنها نطلع بالآتي:

م = (−١ ، ٢)

∴ نق = √(١ + ٤ − ٠) = √٥ وحدة طول

٤٦) اذا كانت:

س² + ص² + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جتا θ) ص − ٨ = ٠

تمثل معادلة دائرة فإن: نق = ...

الحل

م = (−½ × ٢ جتا θ ، −½ × −٢ جتا θ)

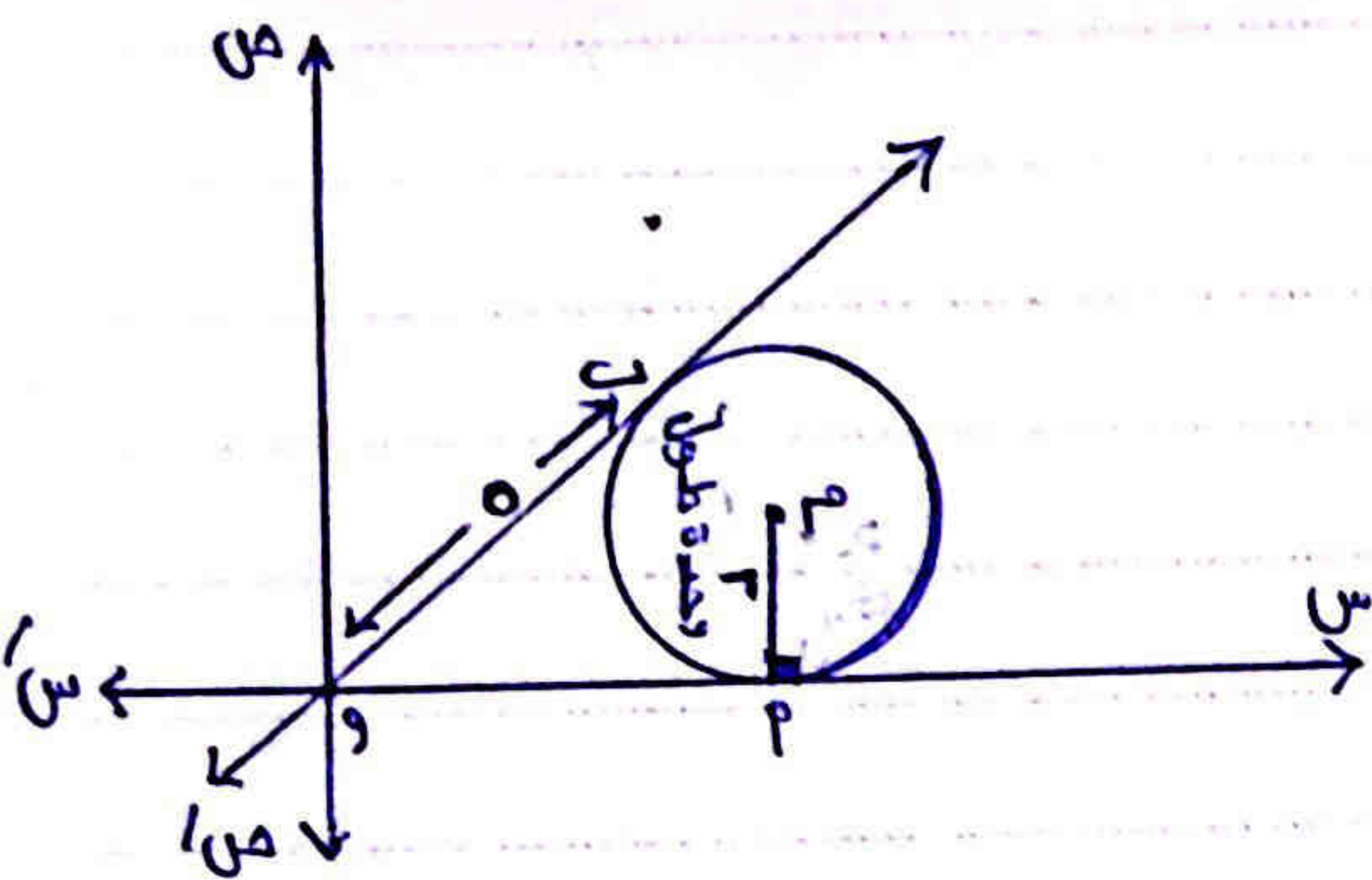
= (− جتا θ ، جتا θ)

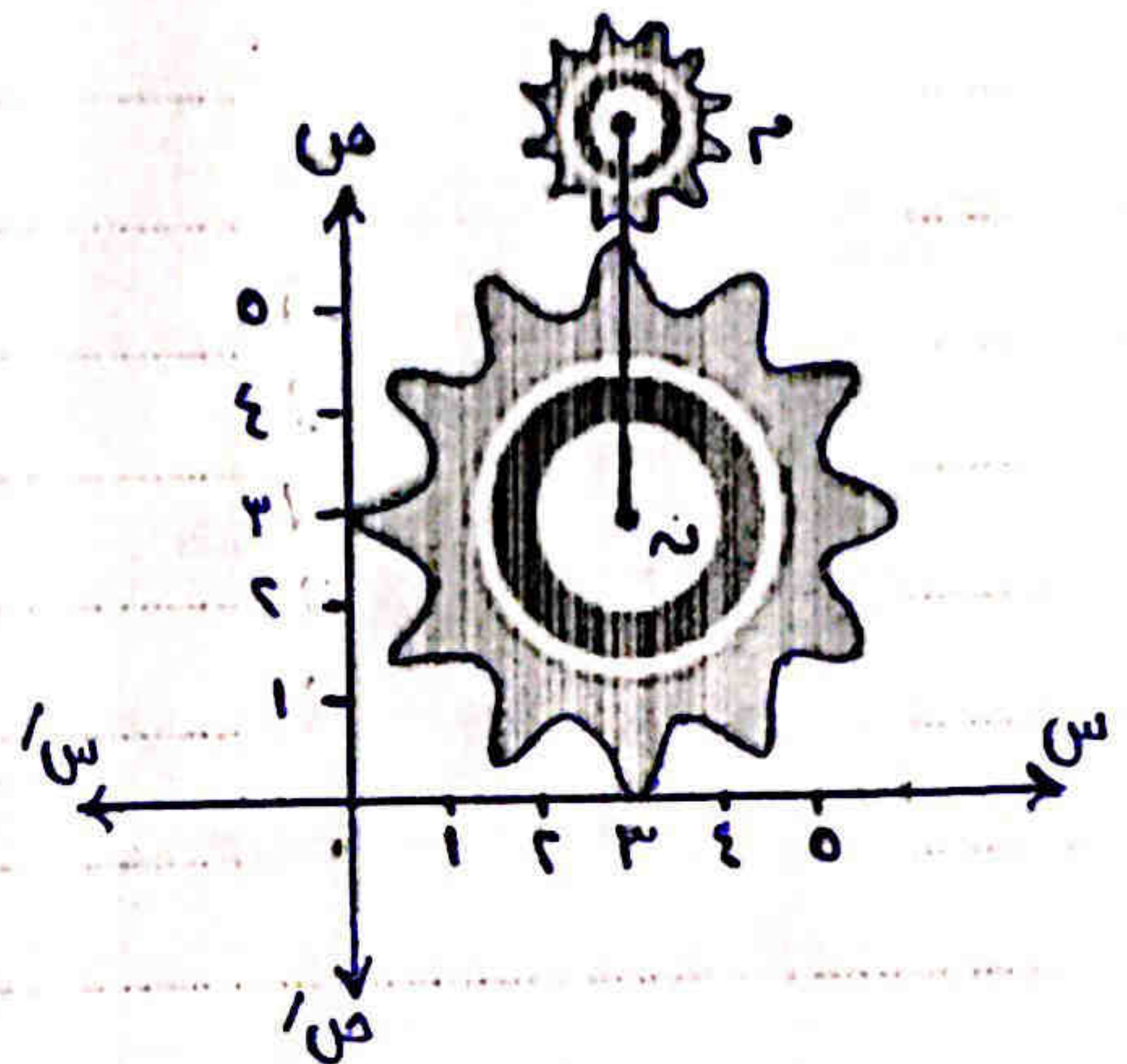
∴ نق = √((− جتا θ)² + (جتا θ)² − (−٨))

= √(جتا² θ + جتا² θ + ٨)

= √(١ + ٨) = ٣ وحدة طول

Scanned with CamScanner

٤٧ الشكل التالي يمثل ترسين لهما مركزها م ، ن ، $\overline{\text{م ن}}$ // محور الصادات فإذا كانت نصف قطر الترس الأصغر = $\frac{1}{3}$ نصف قطر الترس الأكبر أوجد معادلة الترس الأصغر؟

الحل

∵ نق (الكبرى) = ٣ وحدة طول

∴ نق (الصغرى) = $\frac{1}{3}$ × ٣ = ١ وحدة طول

∴ احداثيات النقطة م = (٣ ، ٧)

← معادلة الدائرة الصغرى هي:

$(س - ٣)^2 + (ص - ٧)^2 = ١$ #

٤٨ في الشكل التالي: اذا كان وب = ٥ وحدة طول أوجد معادلة الدائرة م.

الحل

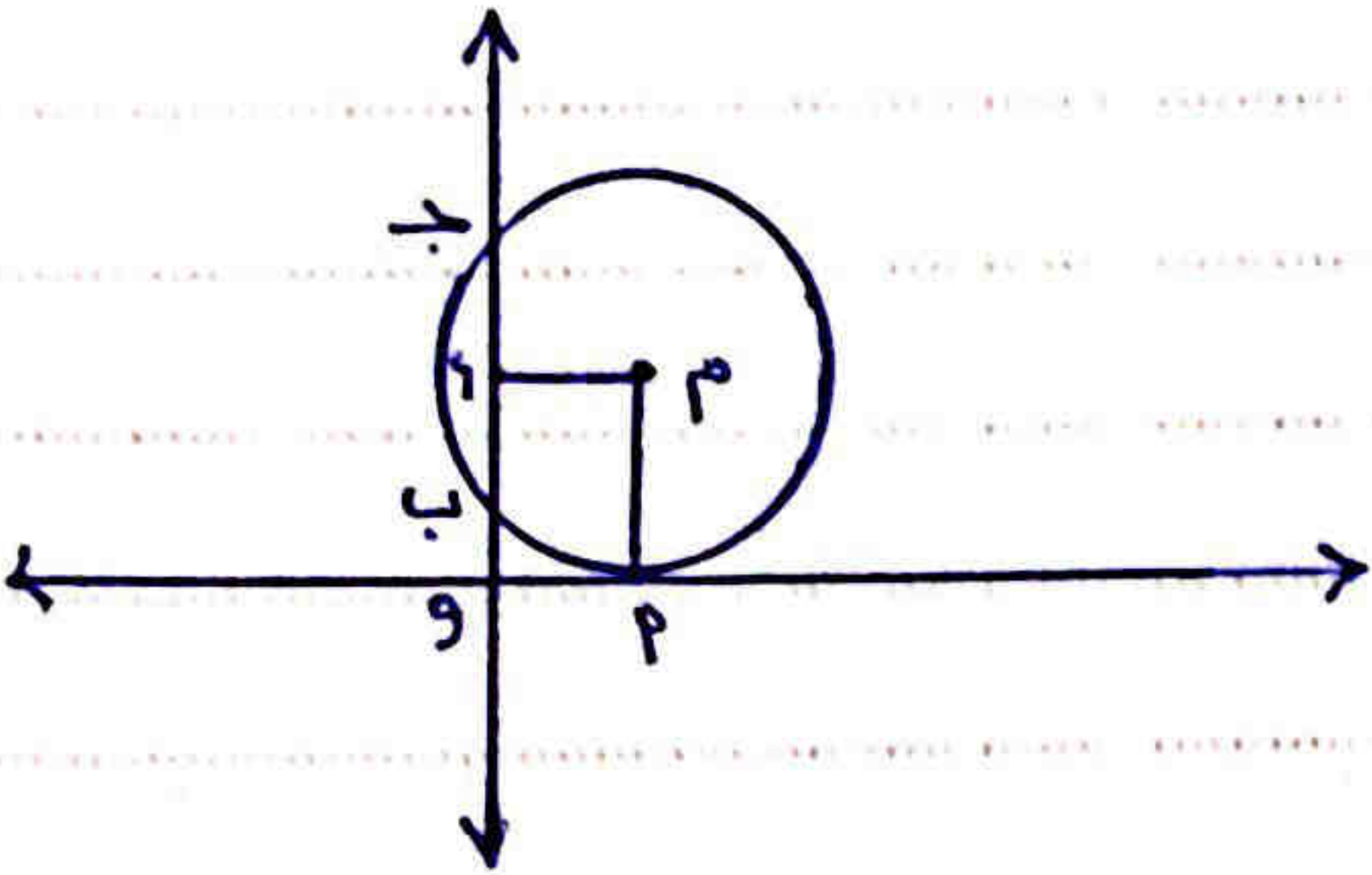
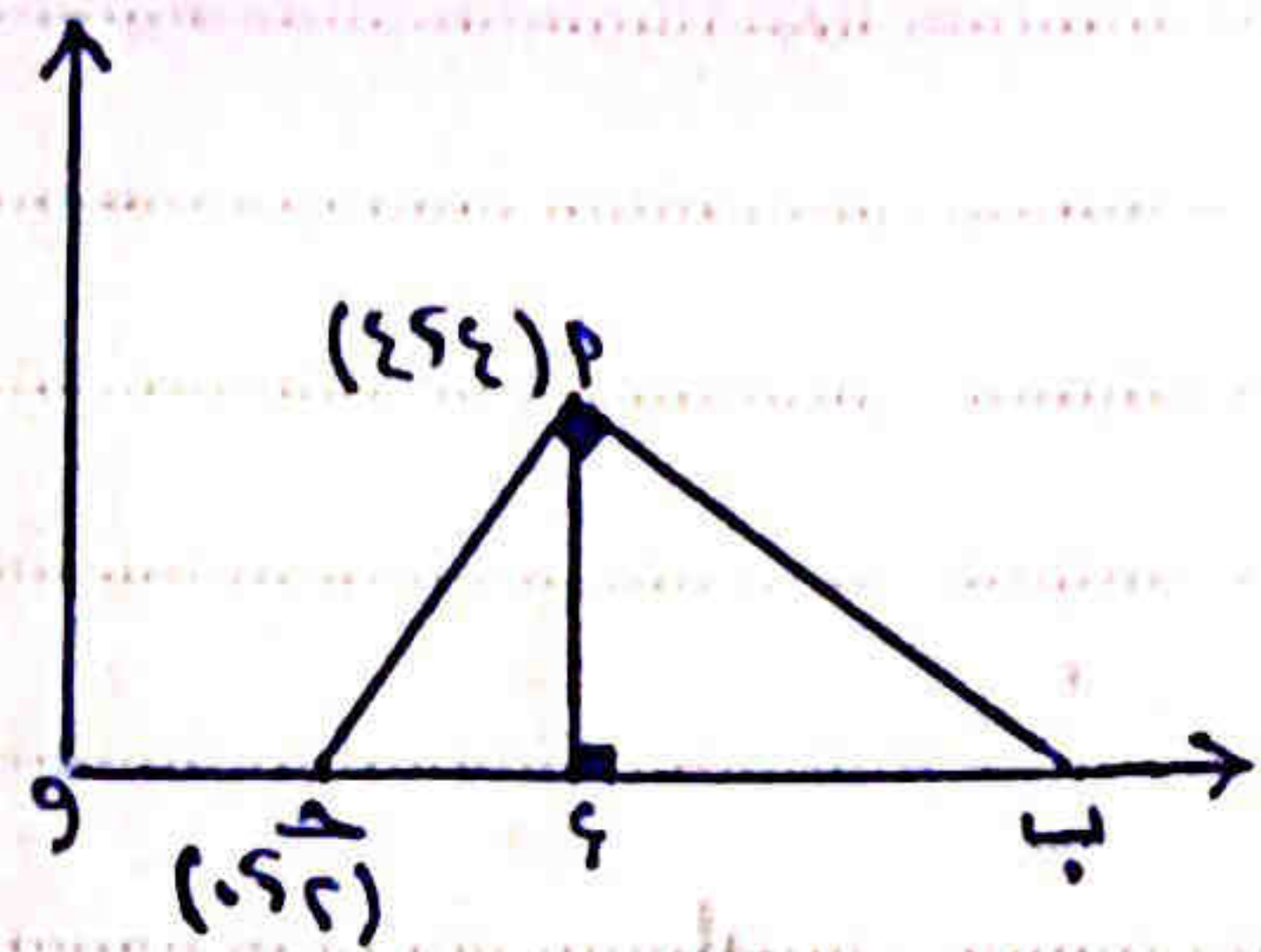
∵ وأ ، وب قطعتان مماستان من و

∴ وأ = وب = ٥ وحدة طول

∴ م = (٥ ، ٢)

← معادلة الدائرة هي:

$(س - ٥)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$ #

Scanned with CamScanner

(٤٩) في الشكل التالي:
أوجد الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمر برؤوس Δ أ ب جـ ؟

الحل

∵ أ = (٤،٤) ، جـ = (٢،٠)

∴ أ د = ٤ وحدات طول

، و جـ = جـ د = ٢ وحدة طول

Δ أ ب د من نظرية اقليدس

$(أد)^2$ = ب د × جـ د

١٦ = ب د × ٢ ∴ ب د = ٨ وحدة طول

وبالتالي فإن احداثي ب يساوي (١٢،٠)

وكذلك يكون ب جـ = ١٠ وحدة طول

← مركز الدائرة م = $(\frac{١٢+٢}{٢}، ٠) = (٧، ٠)$

← نق = $\frac{١}{٢}$ (ب د) = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ وحدة طول

← الصورة القياسية:

$(س-٧)^2 + ص^2 = ٢٥$ #

(٥٠) في الشكل التالي:
اذا كان ب جـ = ٦سم ، و ب = ٢سم
أوجد معادلة الدائرة:

الحل

من تطبيقات التشابه في الدائرة:

$(و أ)^2$ = و ب × و جـ

= ٢ × (٢+٦) = ١٦

∴ و أ = ٤سم

← م د ⊥ ب جـ ∴ د منتصف ب جـ

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣سم

∴ و د = ٢ + ٣ = ٥سم

← تقدأ الوقت نجيب المركز

∴ م = (٤ ، ٥)

∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |٥| = ٥

← المعادلة هي:

$(س-٤)^2 + (ص-٥)^2 = ٢٥$ #

Scanned with CamScanner